

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

Лекции 1—2 Определители и матрицы

Лекция 1

1.1.	Понятие матрицы. Виды матриц	19
1.1.1.	Основные определения	19
1.1.2.	Виды матриц	19
1.2.*	Перестановки и подстановки	21
1.3.*	Понятие определителя любого порядка	22
1.4.	Определители второго и третьего порядка	23
1.5.	Свойства определителей	24
1.6.	Теорема о разложении определителя по строке (столбцу)	26
1.7.	Методы вычисления определителя n -го порядка	27
1.7.1.	Метод понижения порядка	27
1.7.2.	Метод сведения к треугольному виду	28

Лекция 2

2.1.	Операции над матрицами	29
2.2.	Обратная матрица	30
2.2.1.	Основные определения	30
2.2.2.	Теорема о существовании левой и правой обратной матрицы	31
2.2.3.	Алгоритм нахождения обратной матрицы	32
2.3.	Решение матричных уравнений	33
2.4.	Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы	34
2.4.1.	Основные определения	34
2.4.2.	Метод окаймляющих миноров	34
2.4.3.	Метод элементарных преобразований	35

Лекция 3

Системы линейных уравнений

3.1.	Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Основные определения	37
3.2.	Системы n линейных уравнений с n неизвестными. Методы решения	40
3.2.1.	Системы n линейных уравнений с n неизвестными	40
3.2.2.	Правило Крамера	41
3.2.3.	Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)	42
3.2.4.	Алгоритм вычислений по методу Гаусса	43
3.3.	Теорема Кронекера — Капелли	44
3.4.	Однородные системы линейных уравнений	47
3.5.	Алгоритм нахождения общего решения системы m уравнений с n неизвестными	47
3.6*.	Фундаментальная система решений	51

Лекция 4

Векторная алгебра

4.1.	Основные определения	55
4.2.	Линейные операции над векторами	56
4.2.1.	Свойства операции сложения векторов	56
4.2.2.	Свойства операции умножения вектора на число	57
4.3.*	Линейная зависимость векторов	58
4.3.1.	Основные определения	58
4.3.2.	Геометрические критерии линейной зависимости	59
4.4.	Базис и координаты	59
4.5.	Ортонормированный базис. Декартова прямоугольная система координат	61
4.6.	Скалярное произведение векторов	62
4.6.1.	Алгебраические свойства	63
4.6.2.	Геометрические приложения	63
4.6.3.	Выражение через декартовы координаты сомножителей	64
4.7.	Векторное произведение векторов	65
4.7.1.	Алгебраические свойства векторного произведения	66
4.7.2.	Геометрические свойства	66

4.7.3.	Выражение через декартовы координаты смножителей	67
4.8.	Смешанное произведение векторов	68
4.8.1.	Алгебраические и геометрические свойства	68
4.8.2.	Выражение смешанного произведения через декартовы координаты сомножителей	70

Лекция 5
Аналитическая геометрия. Прямая и плоскость
в пространстве

5.1.	Основы аналитической геометрии	73
5.1.1.	Уравнение поверхности	73
5.1.2.	Уравнения линии	74
5.2.	Плоскость в пространстве	74
5.2.1.	Плоскость как поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости	74
5.2.2.	Неполные уравнения плоскостей	75
5.2.3.	Уравнение плоскости «в отрезках»	76
5.2.4.	Нормальное уравнение плоскости	77
5.2.5.	Приведение уравнения плоскости к нормальному виду	78
5.2.6.	Расстояние от точки до плоскости	78
5.2.7.	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки	79
5.2.8.	Угол между двумя плоскостями	80
5.2.9.	Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей	81
5.3.	Прямая линия в пространстве	81
5.3.1.	Векторное уравнение прямой	81
5.3.2.	Параметрические уравнения прямой	81
5.3.3.	Канонические уравнения прямой	82
5.3.4.	Уравнения прямой, проходящей через две данные точки	82
5.3.5.	Общие уравнения прямой	82
5.3.6.	Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую	83
5.3.7.	Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых	83
5.4.	Прямая и плоскость	84
5.4.1.	Точка пересечения прямой и плоскости	84
5.4.2.	Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости	84

Лекция 6
Аналитическая геометрия на плоскости

6.1.	Простейшие задачи на плоскости	87
6.1.1.	Расстояние между двумя точками	87
6.1.2.	Деление отрезка в данном отношении	87
6.2.	Прямая линия на плоскости	88
6.2.1.	Общее уравнение прямой	88
6.2.2.	Канонические уравнения прямой	88
6.2.3.	Уравнение прямой, проходящей через две точки	88
6.2.4.	Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении	89
6.2.5.	Уравнение прямой в отрезках	90
6.2.6.	Нормальное уравнение прямой	90
6.2.7.	Расстояние от точки до прямой	90
6.2.8.	Координаты точки пересечения двух прямых	91
6.2.9.	Угол между двумя прямыми	91
6.2.10.	Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых	92
6.3.	Кривые второго порядка	92
6.3.1.	Эллипс	92
6.3.2.	Окружность	94
6.3.3.	Гипербола	95
6.3.4.	Парабола	97
6.4.	Преобразования координат	98
6.4.1.	Параллельный перенос	98
6.4.2.	Поворот координатных осей	99
6.4.3.	Изменение начала координат и поворот осей	100
6.4.4*.	Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду	100

Лекция 7
**Аналитическая геометрия. Поверхности
второго порядка**

7.1.	Поверхности	102
7.1.1.	Линейчатые поверхности	103
7.1.2.	Поверхности вращения	103
7.1.3.	Поверхности второго порядка	104
7.2.	Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям	105
7.2.1.	Эллипсоид	105
7.2.2.	Однополостный гиперболоид	106
7.2.3.	Двуполостный гиперболоид	107

7.2.4.	Эллиптический параболоид	108
7.2.5.	Гиперболический параболоид	109
7.2.6.	Конус	110
7.2.7.	Эллиптический цилиндр	110
7.2.8.	Гиперболический цилиндр	111
7.2.9.	Параболический цилиндр	111

Лекции 8—9

Элементы теории множеств и математической логики. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности

Лекция 8

8.1.	Элементы теории множеств и математической логики	112
8.2.	Числовые множества	114
8.3.	Числовые промежутки	115
8.4.	Ограниченные множества	116
8.5.	Числовые последовательности	117
8.6.	Свойства ограниченных последовательностей	118

Лекция 9

9.1.	Предел числовой последовательности	119
9.2.	Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности	120
9.3.	Свойства бесконечно малых последовательностей	121
9.4.	Свойства сходящихся последовательностей	123
9.5.	Монотонные последовательности	124
9.6.	Число e как предел монотонной последовательности	126
9.7.	Предельные точки. Верхний и нижний пределы	128

Лекции 10—11

Функции. предел функции

Лекция 10

10.1.	Понятие функции. График функции. Способы задания функции	131
10.2.	Основные характеристики функции	133
10.3.	Обратная функция. Сложная функция	135
10.4.	Основные элементарные функции	136
10.4.1.	Степенные функции	136
10.4.2.	Трансцендентные функции	138
10.4.3.	Тригонометрические функции	138

10.4.4.	Обратные тригонометрические функции	139
10.4.5.	Гиперболические функции	139
10.5.	Элементарные и неэлементарные функции	140

Лекция 11

11.1.	Предел функции в точке	141
11.2.	Предел функции в бесконечности	142
11.3.	Односторонние пределы	143
11.4.	Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства	144
11.4.1.	Свойства бесконечно малых функций	145
11.4.2.	Свойства бесконечно больших функций	146
11.5.	Таблица определений предела	146

Лекции 12—13 **Замечательные пределы. Непрерывность функций**

Лекция 12

12.1.	Свойства функций, имеющих предел	148
12.2.	Замечательные пределы	151
12.2.1.	Первый замечательный предел	151
12.2.2.	Второй замечательный предел	153
12.3.	Сравнение бесконечно малых функций	155

Лекция 13

13.1.	Непрерывность функции	157
13.1.1.	Непрерывность функции в точке	157
13.1.2.	Непрерывность функций на множестве	159
13.1.3.	Непрерывность основных элементарных функций	160
13.1.4.	Свойства непрерывных функций	161
13.1.5.	Непрерывность обратной функции	162
13.1.6.	Непрерывность сложной функции	162
13.1.7.	Свойства функций, непрерывных на отрезке	163
13.2.	Точки разрыва и их классификация	166

Лекции 14—15 **Производная и дифференциал**

Лекция 14

14.1.	Производная функции	170
14.1.1.	Определение производной функции	170

14.1.2.	Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции	171
14.1.3.	Механический смысл производной	173
14.2.	Правила и формулы дифференцирования	173
14.2.1.	Производная суммы, разности, произведения и частного функций	173
14.2.2.	Производная обратной функции	173
14.2.3.	Таблица производных	175
14.2.4.	Производная сложной функции	176
14.2.5.	Логарифмическая производная	176
14.2.6.	Производная неявной функции	177
14.2.7.	Производная функции, заданной параметрически	178

Лекция 15

15.1.	Производные высших порядков	179
15.1.1.	Определение производной n -го порядка	179
15.1.2.	Правила вычисления производной n -го порядка	179
15.1.3.	Вторая производная от неявной функции	180
15.1.4.	Вторая производная от параметрически заданной функции	180
15.1.5.	Механический смысл второй производной	181
15.2.	Дифференциал функции	181
15.2.1.	Правила вычисления производной n -го порядка	181
15.2.2.	Дифференциал независимой переменной	182
15.2.3.	Свойства дифференциалов	182
15.2.4.	Геометрический смысл дифференциала	182
15.2.5.	Применение дифференциала к приближенным вычислениям	183
15.2.6.	Дифференциал сложной функции	184
15.2.7.	Дифференциалы высших порядков	184

Лекция 16

Основные теоремы анализа. Правило Лопиталья — Бернулли. Формула Тейлора

16.1.	Основные теоремы анализа	186
16.1.1.	Теорема Ролля	186
16.1.2.	Теорема Лагранжа	188
16.1.3.	Теорема Коши	189
16.2.	Правило Лопиталья — Бернулли	190
16.3.	Формула Тейлора	192

16.3.1. Частные случаи формулы Тейлора	194
16.3.2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций	195
16.3.3. Оценка остаточного члена	197
16.3.4. Приложения формул Тейлора и Маклорена	197

ЧАСТЬ II

Лекции 17—18

Исследование функций и построение графиков

Лекция 17

17.1. Исследование функций без привлечения производных	200
17.1.1. Точки разрыва	200
17.1.2. Асимптоты графика функции	202
17.2. Исследование функций с помощью первой производной	207
17.2.1. Монотонность функции	207
17.2.2. Локальный экстремум функции	210
17.2.3. Необходимые условия экстремума	212
17.2.4. Достаточные условия экстремума	213
17.2.5. Правило отыскания экстремумов функции	214

Лекция 18

18.1. Исследование функций с помощью второй производной	215
18.1.1. Исследование функций на максимум и минимум	215
18.1.2. Направление выпуклости и точки перегиба кривой	215
18.2. Общая схема исследования функции	218
18.3. Примеры исследования функций	218

Лекции 19—20

Комплексные числа. Многочлены в комплексной области

Лекция 19

19.1. Комплексные числа. Основные определения	227
19.1.1. Алгебраическая форма комплексного числа	227
19.1.2. Изображение комплексного числа на плоскости. Тригонометрическая форма комплексного числа	228

19.1.3.	Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа	229
19.2.	Действия над комплексными числами	230
19.2.1.	Сравнение, сложение и вычитание	230
19.2.2.	Умножение, деление, возведение в целую степень	231
19.2.3.	Комплексное сопряжение	232
19.2.4.	Извлечение корня	234
19.3.	Комплекснозначная функция действительного аргумента	237

Лекция 20

20.1.	Многочлены в комплексной области. Корни многочлена ...	237
20.2.	Основная теорема алгебры многочленов	239
20.3.	Разложение правильных рациональных дробей	243

Лекции 21—22 **Неопределенный интеграл**

Лекция 21

21.1.	Неопределенный интеграл	249
21.1.1.	Основные определения	249
21.1.2.	Свойства неопределенного интеграла	250
21.1.3.	Таблица основных интегралов	250
21.4.	Методы интегрирования	251
21.4.1.	Непосредственное интегрирование	251
21.4.2.	Замена переменной в неопределенном интеграле	251
21.4.3.	Интегрирование по частям	254
21.4.4.	Возвратное интегрирование	256

Лекция 22

22.1.	Интегрирование рациональных дробей	257
22.1.1.	Методы интегрирования простейших дробей	257
22.1.2.	Общая схема интегрирования рациональной дроби $\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$	260
22.2.	Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции	262
22.2.1.	Интегрирование произведений тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$	262
22.2.2.	Интегрирование функций вида $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$...	263

22.2.3.	Универсальная тригонометрическая подстановка	263
22.3.	Интегрирование иррациональных выражений	265
22.3.1.	Линейные иррациональности	265
22.3.2.	Дробно-линейные иррациональности	266
22.3.3.	Квадратичные иррациональности — тригонометрические подстановки	267
22.3.4.	Интегрирование дифференциальных биномов	269
22.3.5.	Метод неопределенных коэффициентов для интегрирования иррациональностей	270
22.3.6.	Подстановки Эйлера	271

Лекции 23—24 Определенный интеграл

Лекция 23

23.1.	Определенный интеграл и его свойства	276
23.1.1.	Основные определения	276
23.1.2.	Геометрический смысл определенного интеграла	277
23.1.3.	Теоремы существования	277
23.1.4.	Свойства определенного интеграла	278
23.1.5.	Теоремы об оценке определенного интеграла	280
23.2.	Формула Ньютона — Лейбница	283
23.2.1.	Замена переменной в определенном интеграле	285
23.2.2.	Интегралы от четных и нечетных функций	286
23.3.	Интегрирование по частям	287

Лекция 24

24.1.	Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур	288
24.1.1.	Вычисление площади в прямоугольных координатах	288
24.1.2.	Параметрическое задание линий	290
24.1.3.	Окружность	291
24.1.4.	Циклоида	291
24.1.5.	Астроида	292
24.1.6.	Вычисление площадей фигур, граница которых задана кривыми в параметрической форме	293
24.1.7.	Полярные координаты на плоскости	294
24.1.8.	Связь полярных координат с декартовыми	294

24.1.9.	Примеры уравнений линий в полярной системе координат	294
24.1.10.	Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат	296
24.2.	Вычисление длины дуги кривой	297
24.2.1.	Вычисление длины плоской кривой в прямоугольных координатах	297
24.2.2.	Вычисление длины плоской кривой в параметрической форме	298
24.2.3.	Дифференциал длины дуги кривой	298
24.2.4.	Длина кривой, заданной в полярных координатах	298
24.2.5.	Площадь поверхности вращения	299
24.2.6.	Вычисление длины дуги пространственной кривой в параметрической форме	301
24.3.	Вычисление объемов тел	302
24.3.1.	Вычисление объемов по заданным площадям поперечных сечений	302
24.3.2.	Вычисление объемов тел вращения	303

Лекция 25

Несобственные интегралы

25.1.	Несобственные интегралы первого рода (по бесконечному промежутку)	306
25.1.1.	Основные определения	306
25.1.2.	Обобщенная формула Ньютона — Лейбница	307
25.1.3.	Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами	311
25.1.4.	Абсолютная и условная сходимость	311
25.2.	Несобственные интегралы второго рода (от неограниченных функций)	313
25.2.1.	Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций	316
25.2.2.	Примеры решения задач	316

Лекции 26—27

Дифференциальные уравнения

Лекция 26

26.1.	Основные понятия	320
26.2.	Дифференциальные уравнения первого порядка	321

26.2.1.	Уравнения с разделяющимися переменными	322
26.2.2.	Однородные уравнения	323
26.2.3.	Обобщенные однородные уравнения	324
26.2.4.	Линейные уравнения	326
26.2.5.	Уравнение Бернулли	327
26.2.6.	Уравнение в полных дифференциалах	328
26.3.	Решение уравнений первого порядка	330
26.4.	Особые решения уравнений первого порядка	330

Лекция 27

27.1.	Дифференциальные уравнения высших порядков	332
27.2.	Дифференциальные уравнения второго порядка	333
27.3.	Уравнения второго порядка, приводимые к уравнениям первого порядка	333
27.3.1.	Уравнение вида $y'' = f(x)$	333
27.3.2.	Уравнение вида $y'' = f(x, y')$	334
27.3.3.	Уравнение вида $y'' = f(y, y')$	335
27.3.4.	Решение уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка	336
27.4.	Уравнения n -го порядка, допускающие понижение порядка ..	336
27.4.1.	Уравнение вида $y^n = f(x)$	336
27.4.2.	Уравнение вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	337
27.4.3.	Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	338
27.4.4.	Уравнение вида $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}(x)) = 0$	339

Лекции 28—29

Линейные дифференциальные уравнения

Лекция 28

28.1.	Общая теория линейных дифференциальных уравнений высшего порядка	341
28.1.1.	Основные определения	341
28.1.2.	Основные теоремы	341
28.2.	Однородные линейные дифференциальные уравнения	343
28.2.1.	Решение уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	343
28.2.2.	Решение уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами	346

Лекция 29

29.1.	Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка	348
-------	---	-----

29.2.	Методы решения неоднородных линейных уравнений второго порядка	349
29.2.1.	Метод вариации произвольных постоянных	349
29.2.2.	Метод неопределенных коэффициентов (для уравнения с постоянными коэффициентами)	350
29.3.	Методы решения неоднородных линейных уравнений высших порядков	355
29.3.1.	Метод вариации произвольных постоянных	355
29.3.2.	Метод неопределенных коэффициентов	357
29.4.	Методы решения неоднородных линейных уравнений n -го порядка	358
29.4.1.	Метод неопределенных коэффициентов	358
29.4.2.	Метод вариации произвольной постоянной	359

Лекция 30

Системы дифференциальных уравнений

30.1.	Нормальные системы ЛДУ	361
30.1.1.	Основные понятия	361
30.1.2.	Методы решения	363
30.2.	Однородные системы ЛДУ с постоянными коэффициентами	364
30.2.1.	Метод исключения неизвестных	364
30.2.2.	Непосредственное решение	366
30.2.3.	Метод интегрируемых комбинаций	371
30.3.	Неоднородные системы ЛДУ с постоянными коэффициентами	372

Лекции 31—32

Функции нескольких переменных

Лекция 31

31.1.	Основные понятия	375
31.2.	Предел функции двух переменных	376
31.3.	Непрерывность функции	377
31.4.	Частное и полное приращения функции двух переменных	378
31.5.	Частные производные первого порядка	378
31.6.	Полный дифференциал функции	379
31.7.	Частные производные высших порядков	382
31.8.	Дифференциалы высших порядков	383
31.9.	Формула Тейлора	384
31.10.	Производная сложной функции	385

31.11. Полная производная	386
31.12. Производная от функции, заданной неявно	386

Лекция 32

32.1. Локальные экстремумы функции двух переменных	388
32.2. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа	392
32.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в области	395
32.4. Геометрические приложения функций двух переменных ...	396
32.4.1. Производная векторной функции скалярного аргумента	396
32.4.2. Уравнение касательной к пространственной кривой	398
32.4.3. Нормальная плоскость и ее уравнение	400
32.4.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	401
Приложения	405
Список литературы	409