Высшее профессиональное образование

БАКАЛАВРИАТ

И. И. БАВРИН

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

УЧЕБНИК

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям гуманитарной подготовки
«Документоведение и архивоведение», «Туризм»
и «Социальная работа», квалификация «бакалавр»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б13

Р е ц е н з е н т ы:
член-корреспондент РАО, доктор педагогических наук,
профессор Российской академии образования *П. И. Самойленко*;
кандидат физико-математических наук, доцент Московского института
радиотехники, электроники и автоматики *Т. А. Кузнецова*;
доктор педагогических наук, профессор Московского института радиотехники,
электроники и автоматики *С. А. Розанова*

Баврин И. И.
Б13 Математика для гуманитариев : учебник для студентов учреждений высш. проф. образования гуманитарных направлений / И.И.Баврин. — М. : Издательский центр «Академия», 2011. — 320 с. — (Сер. Бакалавриат).
ISBN 978-5-7695-7957-8

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки «Педагогическое образование» 050100 «Математика» для студентов высших учебных заведений, изучающих гуманитарные дисциплины, (квалификация «бакалавр»).

Учебник содержит изложение основ математики для студентов, специализирующихся в области гуманитарных наук, и упражнения ко всем излагаемым вопросам. Подробно рассмотрены разделы математики, относящиеся к математическому анализу, теории вероятностей и математической статистике, дискретной математике, сопровождаемые большим числом разобранных примеров и задач. Дан краткий исторический очерк зарождения и развития математики.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования, обучающихся по гуманитарным направлениям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-7957-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль математики в различных областях естествознания в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Приведем простейший пример математической модели. Представим себе, что требуется определить площадь пола комнаты. Для выполнения такого задания измеряют длину и ширину комнаты, а затем перемножают полученные числа. Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект — пол комнаты — заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписывают размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимают за искомую площадь.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Математические модели давно и весьма успешно применяют в механике, физике, астрономии.

В современный период роль математических методов возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в медицине, и в спорте. Идеями математики пронизаны и гуманитарные науки: экономика, социология, логика, философия, психология, педагогика (см. например, [1, 9, 14]).

Учебник содержит те разделы математики, которые в известной мере обеспечивают приложения в гуманитарной сфере. Это, прежде всего, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика и дискретная математика.

В учебнике много примеров, задач, рисунков, что делает изложение наглядным и показывает, какие задачи можно решать, используя ее теоретический материал. Учебник содержит и большое число упражнений ко всем главам, достаточное для ведения (групповых) практических занятий.

Для развития у студентов-гуманитариев математического мышления в учебнике многие вопросы изложены с полным доказательством, сложные доказательства опущены (есть ссылки на более полные учебники, приведенные в списке литературы).

Учебник состоит из 12 глав. Глава 1 посвящена аналитической геометрии, векторной и линейной алгебре, главы 2—7 посвящены математическому анализу, главы 8—10 — теории вероятностей и математической статистике, глава 11 — дискретной математике, глава 12 — краткой истории зарождения и развития математики.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Метод координат

1. Декартовы прямоугольные координаты. Выберем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с указанными на них положительными направлениями. Прямые Ox и Oy называют ***координатными осями***, точку их пересечения O — ***началом координат***. Обычно полагают, что ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна относительно наблюдателя, положительное направление на Ox слева направо, на Oy — снизу вверх (рис. 1.1).

Возьмем теперь некоторую единицу масштаба, с помощью которой будут производиться все измерения на плоскости xOy.

Совокупность координатных осей Ox, Oy и выбранной единицы масштаба называют ***декартовой прямоугольной*** (или кратко ***прямоугольной***) ***системой координат*** на плоскости[1].

Произвольной точке M плоскости поставим в соответствие два числа (рис. 1.1):

а) ***абсциссу*** x, равную расстоянию точки M от оси Oy, взятому со знаком «+», если M лежит правее Oy, и со знаком «–», если M лежит левее Oy;

б) ***ординату*** y, равную расстоянию точки M от оси Ox, взятому со знаком «+», если M лежит выше Ox, и со знаком «–», если M лежит ниже Ox.

Абсциссу x и ординату y называют ***декартовыми прямоугольными*** (или кратко ***прямоугольными***) ***координатами*** точки M. Обозначение $M(x; y)$ означает: точка M с абсциссой, равной x, и ординатой, равной y.

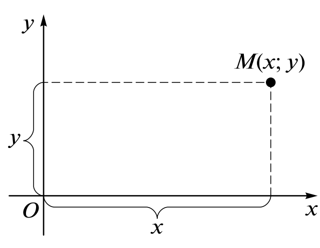

Рис. 1.1

Отметим, что *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y* (ее координат).

---

[1] Декартова прямоугольная система координат носит имя французского математика, основателя аналитической геометрии Рене Декарта (1596 — 1650).

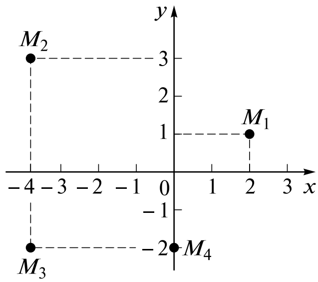

Рис. 1.2

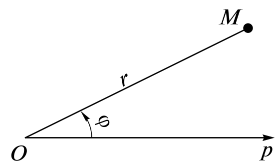

Рис. 1.3

Верно и обратное: ***каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости***. Это означает, что на плоскости положение произвольной точки M полностью определяется ее координатами x и y.

Координатные оси Ox и Oy разбивают плоскость на I, II, III и IV квадранты[1]. Знаки координат точек в различных квадрантах указаны в следующей таблице:

Координаты	Квадранты			
	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

При этом если точка $M(x; y)$ лежит на оси Oy, то $x = 0$; если $M(x; y)$ лежит на оси Ox, то $y = 0$. На рис. 1.2 построены точки $M_1(2; 1)$, $M_2(-4; 3)$, $M_3(-4; -2)$ и $M_4(0; -2)$.

2. Полярные координаты. Зафиксируем на плоскости точку O и выходящую из нее полупрямую Op, а также выберем единицу масштаба. Точка O называется ***полюсом***, полупрямая Op — ***полярной осью*** (рис. 1.3).

Произвольной точке M (отличной от O) плоскости поставим в соответствие два числа:

полярный радиус r, равный расстоянию точки M от полюса O, измеренному выбранной единицей масштаба;

полярный угол φ, равный углу между полярной осью Op и полупрямой OM.

Полярный угол φ измеряется в радианах, отсчет положительных (отрицательных) значений φ ведется от Op против движения (по движению) часовой стрелки. При этом обычно полагают, что $-\pi < \varphi \leq \pi$.

[1] Иногда их также называют координатными углами.

Полюсу O соответствует полярный радиус $r = 0$, полярный угол для него не определен.

Запись $M(r; \varphi)$ означает: точка M с полярными координатами r и φ.

Будем считать начало координат O прямоугольной системы xOy одновременно полюсом O, а положительную часть оси Ox примем за полярную ось Op (рис. 1.4).

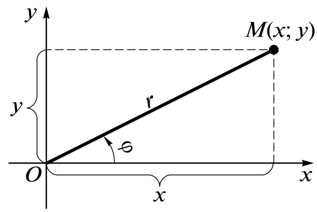

Рис. 1.4

На рис. 1.4 видно, что для точки M $(x; y)$ $(M$ $(r; \varphi))$ справедливы соотношения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{1.1}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.2}$$

Формулы (1.1) выражают прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Это можно доказать для любого расположения точки M на координатной плоскости. Формулы (1.2) выражают полярные координаты точки M через ее прямоугольные координаты и тоже верны при любом положении точки M.

Заметим, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ дает два значения φ, так как $-\pi < \varphi \le \pi$. Поэтому для вычисления полярного угла φ точки M по ее прямоугольным координатам x и y предварительно выясняют, в каком квадранте лежит точка M.

Пример 1.1. Даны прямоугольные координаты точки A: $x = 1$, $y = 1$. Найдем ее полярные координаты.

Решение. По формулам (1.2) находим $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Из двух значений $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$ выбираем $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, так как точка A лежит в первом квадранте. Итак, полярные координаты данной точки: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 1.2. Полярные координаты точки A: $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Найдем прямоугольные координаты этой точки.

Решение. По формулам (1.1) прямоугольные координаты точки A будут равны:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad y = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

3. Основные задачи, решаемые методом координат. ***Задача о расстоянии между двумя точками.*** Найдем расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 1.5). Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2}.$$

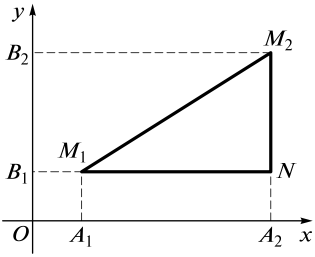

Рис. 1.5

Из курса геометрии известно, что расстояние d между точками A и B, расположенными на координатной прямой (оси), вычисляется по формуле $d = AB = |x_B - x_A|$, где x_A и x_B — координаты точек A и B этой прямой. Тогда $M_1N = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = |y_2 - y_1|$. Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.3)$$

Пример 1.3. Найти расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$.

Решение. По формуле (1.3) имеем

$$AB = \sqrt{(-4+1)^2 + (2+2)^2} = 5.$$

Задача о делении отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2\ (x_2; y_2)$. Требуется найти точку $M(x; y)$, лежащую на отрезке $M_1\ M_2$ и делящую его в данном отношении

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \qquad (1.4)$$

Опустим из точек M_1, M и M_2 перпендикуляры на ось Ox (рис. 1.6). По известному предложению из элементарной геометрии о пересечении сторон угла параллельными прямыми получим

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2}.$$

При выбранном расположении точек имеем

$$A_1A = x - x_1, \quad AA_2 = x_2 - x.$$

Следовательно, отношение (1.4) принимает вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (1.5)$$

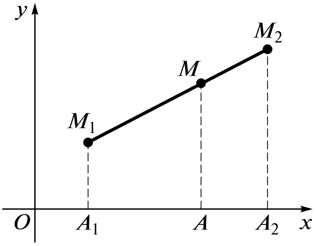

Рис. 1.6

Аналогично

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (1.6)$$

В частности, если $\lambda = 1$, т. е. при делении отрезка M_1M_2 пополам, получаем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Примечание. Формулы (1.5) и (1.6) верны при любом расположении точек M_1 и M_2.

Пример 1.4. Вычислить координаты точки M $(x;\ y)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(4;\ 7)$ в отношении $\dfrac{M_1M}{MM_2}=2.$

Решение. Согласно формулам (1.5) и (1.6) имеем

$$x=\frac{1+2\cdot 4}{3}=3,\quad y=\frac{1+2\cdot 7}{3}=5.$$

4. Уравнение линии на плоскости. Прямоугольная и полярная системы координат позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Уравнением линии на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение

$$f(x,y)=0$$

с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии. Здесь f — функция двух переменных, сопоставляющая каждой паре x, y число $f(x,\ y)$ (см. подразд. 5.1, п. 1).

Переменные x и y уравнения линии называются *текущими координатами*.

Покажем, например, что уравнение $x - y = 0$ или

$$x=y \tag{1.7}$$

является уравнением биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

По свойству биссектрисы угла для произвольной точки $M(x;\ y)$ (лежащей на биссектрисе) $N_2M = N_1M$ или $ON_1 = ON_2$ (рис. 1.7) и поэтому $x = y$, т.е. координаты всех точек биссектрисы удовлетворяют уравнению (1.7). Очевидно также, что у любой точки, не лежащей на данной биссектрисе, координаты не равны между собой и не удовлетворяют уравнению (1.7).

Отметим, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда будет линия. Может случиться, что уравнению соответствует лишь несколько точек. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$, например, на плоскости соответствует только одна точка (0; 0). Встречаются и такие случаи, когда заданному уравнению не соответствует на плоскости ни одной точки (например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

Линия может определяться на плоскости не только уравнением, содержащим декартовы координаты, но и уравнением в полярных координатах.

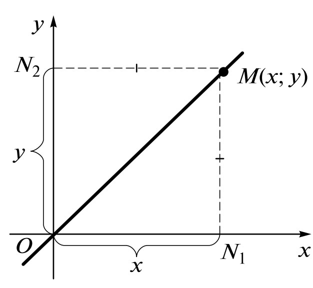

Рис. 1.7

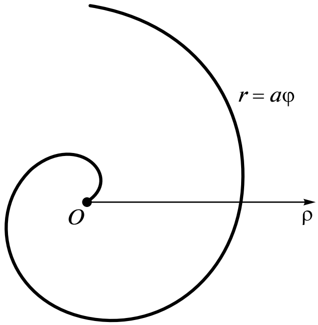

Рис. 1.8

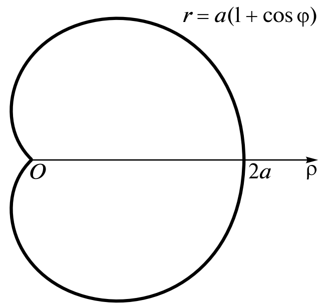

Рис. 1.9

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение $r = a\varphi$, где a — положительное число, r и φ — полярные координаты.

Решение. Обозначим через M точку с полярными координатами $(r; \varphi)$. Если $\varphi = 0$, то и $r = 0$, если φ возрастает, начиная с нуля, то r будет возрастать пропорционально φ. Точка $M(r, \varphi)$, таким образом, исходя из полюса, движется вокруг него с ростом φ (в положительном направлении), одновременно удаляясь от него. Множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $r = a\varphi$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 1.8).

Пример 1.6. Кривая, задаваемая уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi) \ (a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi),$$

называется *кардиоидой*.

Решение. Составим таблицу значений φ и r:

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
r	$2a$	$\approx 1{,}9a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0{,}1a$	0

Построив точки кардиоиды по значениям φ и r из этой таблицы, можно составить приближенное представление о форме этой кривой (рис. 1.9).

1.2. Прямая линия

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy (рис. 1.10). Обозначим точку пересечения l с осью Oy через $B(0; b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l через φ. Угол φ, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки $(0 \le \varphi < \pi)$, называется *углом наклона* прямой l к оси Ox.

Выведем уравнение прямой l.