УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭКОНОМИКЕ

Е. Б. БУРМИСТРОВА, С. Г. ЛОБАНОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям направления подготовки «Экономика»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б912

Высшая математика и ее приложения к экономике

Р е ц е н з е н т ы:
д-р физ.-мат. наук, проф. МФТИ *В. Н. Диесперов*;
д-р физ.-мат. наук, проф. МГУ им. М. В. Ломоносова *Е. Т. Шавгулидзе*

Бурмистрова Е. Б.
Б912 Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебник для студ. высш. учеб. заведений / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 336 с. — (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике).

ISBN 978-5-7695-6266-2

В учебнике приведены сведения из линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, которые отражают как требования образовательных стандартов, так и потребности основных разделов современной экономической теории.

Учебник помимо иллюстрирующих основной материал примеров содержит задачи для самостоятельного решения.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования. Может быть использован преподавателями математических дисциплин экономических и технических учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-6266-2

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X

$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X

$\varnothing$ — пустое множество

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ — разность множеств A и B

$A \subset B$ — множество A содержится в множестве B

$A \times B$ — декартово произведение множеств A и B

$\{x \in A : P(x)\}$ — множество элементов $x \in A$, обладающих свойством $P(\cdot)$

$\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$

$f : X \to Y$ — отображение f множества X в множество Y (иначе говоря, функция f с областью определения X, принимающая значения в множестве Y)

$f : x \mapsto y$ — отображение (функция) f сопоставляет элементу x элемент y

$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}$ — образ множества A при отображении $f : X \to Y$

$\operatorname{Im} f$ — множество значений $f(X)$ отображения $f : X \to Y$

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ — прообраз множества $B \subset Y$ при отображении $f : X \to Y$

$g \circ f$ — композиция отображений f и g: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ — множество всех целых чисел

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех рациональных чисел

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных (действительных) чисел

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел

$\mathbb{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ — множество всех n-мерных строк

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — координатная запись точки n-мерного пространства

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ — множество всех неотрицательных n-мерных строк

$\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$ — множество всех положительных n-мерных строк

$\sup A$, $\inf A$ — верхняя и нижняя грани числового множества A

V^2 и V^3 — множества всех геометрических векторов на плоскости и в пространстве с обычными операциями над векторами

$P_n[x]$ — множество всех многочленов переменной x степени не выше n с обычным сложением и умножением на числа

$C[a,b]$ — множество всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с обычным сложением и умножением на числа

$D[a,b]$ — множество всех дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с обычными операциями

$R[a,b]$ — множество всех интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$ функций с обычными операциями

$C(X,Y)$ — множество непрерывных на X функций со значениями в Y

$C(X)$ — множество непрерывных на X функций с числовыми значениями

$C^k(X,Y)$ — множество функций со значениями в Y, обладающих в точках множества X непрерывными производными k-го порядка

C^k — краткое обозначение $C^k(X,Y)$

$C^\infty(X,Y)$ — множество функций со значениями в Y, обладающих в точках множества X производными любого порядка

C^∞ — краткое обозначение $C^\infty(X,Y)$.

$|x|$ — абсолютная величина числа, или норма элемента евклидова пространства

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов евклидова пространства

$x \perp y$ — ортогональные векторы

$x^-_M \in M$ и $x^\perp_M \perp M$ — ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора x при проецировании на подпространство M

$[a,b]$ — векторное произведение векторов пространства

$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ — вещественная и мнимая части комплексного числа z

$\arg z$ — аргумент комплексного числа z

$\operatorname{Lin}(a_1, \ldots, a_n)$ — линейная оболочка системы векторов $a_1, \ldots, a_n$

$V_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$ — окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданного радиуса $\delta > 0$

$\overset{\circ}{V}_\delta(x_0) = V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x - x_0| < \delta\}$ — проколотая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданного радиуса $\delta > 0$

$V_\delta(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \delta\}$ — окрестность бесконечности заданного радиуса $\delta > 0$

$\operatorname{sgn}(x)$, $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ — знак числа x (сигнум x), целочисленное округление x снизу, целочисленное округление x сверху

$n!$ — факториал, $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ при $n \in \mathbb{N}$

C_n^k — биномиальный коэффициент, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ — конъюнкция, дизъюнкция, импликация (логическое следование), эквиваленция (равносильность) высказываний A и B

$H_f(x)$ — матрица Гессе функции f в точке x

$x \to x_0$, $x \to +\infty$ — базы множеств в $\mathbb{R}^n$

$x \to x_0-$, $x \to x_0+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ — базы множеств в $\mathbb{R}$

$n \to +\infty$ — база множеств в $\mathbb{N}$

$\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = L$ — предел функции f по базе $\mathcal{B}$ равен L

$f = O(g)$ по базе $\mathcal{B}$ — f есть «о большое» от g по базе $\mathcal{B}$

$f \asymp g$ по базе $\mathcal{B}$ — f и g есть функции одного порядка по базе $\mathcal{B}$

$f = o(g)$ по базе $\mathcal{B}$ — f есть «о малое» от g по базе $\mathcal{B}$

$f \sim g$ по базе $\mathcal{B}$ — функция f эквивалентна функции g по базе $\mathcal{B}$

$f'(x_0)$, $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ — производная функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, производная слева, производная справа

$A^{(j)}$ — j-й столбец матрицы A

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A

A^* — транспонированная матрица A

$\det A$ или $|A|$ — определитель матрицы A

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A

$\operatorname{rang} A$ — ранг матрицы A

$\operatorname{rang}(a_1, \ldots, a_n)$ — ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_n$

$\dim L$ — размерность линейного пространства L

$\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ — ядро и множество значений линейного оператора φ

$\exists x : \ldots$ — существует такое x, что $\ldots$

$\forall x \ldots$ — для любого $x \ldots$

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$

$\overline{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B

i, **j**, **k** — векторы единичной длины, указывающие положительное направление осей координат

■ — конец доказательства

ОТ АВТОРОВ

Основу учебника «Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной», а также учебника «Математический анализ и дифференциальные уравнения», написанного теми же авторами, составляют расширенные варианты лекций по линейной алгебре, математическому анализу и дифференциальным уравнениям, которые были прочитаны авторами студентам экономического факультета Государственного университета — Высшей школы экономики (ГУ ВШЭ) за последние несколько лет.

Данный учебник включает все, что относится к линейной алгебре, в том числе некоторые сведения из аналитической геометрии и несколько разделов одномерного математического анализа: пределы числовых функций, непрерывные числовые функции, дифференцируемые числовые функции. Изучение материала учебника не требует какой бы то ни было предварительной математической подготовки сверх обычной программы общеобразовательной средней школы.

Линейная алгебра и начала математического анализа могут изучаться одновременно или последовательно. Упоминание в описании некоторых линейных пространств непрерывных, дифференцируемых или интегрируемых функций, использование в доказательстве существования собственных векторов симметричных матриц теоремы Вейерштрасса лишь подготавливают читателей к пониманию внутреннего единства математики. Последующее изложение многомерного анализа, теории дифференциальных и разностных уравнений призвано подтвердить это единство.

Почти все утверждения сопровождаются доказательствами, что, по мнению авторов, позволяет вместе с четкими определениями основных понятий и поучительными примерами кратчайшим способом разъяснить эти понятия, выявить область применимости теорем, установить связь введенных в разное время понятий.

Студенты не должны пугаться доказательств. Вынесенное многими из них (и их родителями) из школы мнение о трудности изучения математики объясняется тем, что в школе рассматриваются в высшей степени основные первичные понятия математики, которые невозможно в тех условиях представить в виде развитой последовательной системы определений и теорем. Даже студентам-математикам Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова не преподаются[1] основания арифметики и геометрии, формальная теория множеств. Мы не приближаемся опасно к основаниям математики. В необходимых случаях (их немного) приводим соответствующие сведения без доказательства.

Оба учебника отвечают программам соответствующих курсов для студентов ГУ ВШЭ, обучающихся по специальности «Экономика». Они не могут заменить существующие руководства, созданные, как правило, на основе учебных курсов для студентов физико-математических специальностей университетов и педагогических вузов, и не претендуют на это.

Любой учебник учитывает условия и традиции преподавания математики в конкретном учебном заведении. Учебник для студентов-математиков МГУ [15] не спутаешь с учебником для студентов-физиков МГУ [13]. Наш подход к построению курса математического анализа близок к [15], курса дифференциальных уравнений — к [2]. В главах учебника, в которых приводятся начальные сведения о системах линейных уравнений и определителях матриц, мы придерживаемся подхода Л. А. Скорнякова [26]. Отличительная черта этого подхода — центральная роль элементарных преобразований матриц. В то же время мы не поддерживаем принятую в учебнике [26] установку на изложение учения о системах линейных уравнений без использования понятия линейной зависимости. Бóльшая часть материала главы «Элементы аналитической геометрии» должна быть хорошо знакома студентам, изучавшим школьную геометрию по учебнику А. В. Погорелова.

Вместе с тем даже лучшие классические учебники не вполне соответствуют требованиям, предъявляемым к курсу математики современной экономической теорией. Например, нигде не упоминаются так называемые теоремы об огибающей. Нет этого и в многочисленных книгах «по математике для экономистов».

[1] Исключение составляет небольшая часть студентов, специализирующихся в области математической логики.

Более того, в некоторых учебниках, адресованных студентам экономических специальностей, например в книге [17], вообще не рассматриваются условные экстремумы или приводятся неполные формулировки принципа множителей Лагранжа [4]. А ведь задача об условном экстремуме многократно возникает в курсе микроэкономики и метод множителей Лагранжа является одной из самых востребованных экономической теорией. Поэтому студенты экономических специальностей должны знать и понимать все его особенности.

В наших учебниках вместе с основными результатами многомерного анализа (теорема о неявной функции, необходимые и достаточные признаки безусловного и условного экстремумов, теоремы об огибающих, свойства выпуклых и вогнутых функций) приводятся его приложения к некоторым задачам экономической теории. Например, в теории потребления изучены свойства функций спроса по Маршаллу и по Хиксу, косвенной функции полезности и функции расходов, доказаны лемма Шепарда и тождество Роя, получено уравнение Слуцкого. Отдельный раздел посвящен теории так называемых CES функций. Нам не встречалось описание таких функций с той же полнотой и ясностью.

Среди книг сходной тематики иностранных авторов выделим [30] и [28]. В каждой из них систематически используются векторные и матричные обозначения, много места отводится многомерному математическому анализу и его приложениям в задачах экономики. Присутствуют упомянутые нами теоремы об огибающих.

Книга М. Интриллигатора [16], несколько раз издававшаяся на русском языке, хотя и не предназначена для первоначального обучения линейной алгебре, математическому анализу или дифференциальным уравнениям, является яркой иллюстрацией требований, предъявляемых к курсу математики современной экономической теорией.

Предоставляем читателям право судить, насколько удачной оказалась наша попытка сочетать полноту и строгость изложения предмета с его компактностью. В значительной степени компактность достигается благодаря использованию понятия предела по базе, что позволяет рассматривать единообразно последовательности и функции, а также пределы при бесконечном росте аргумента. При этом появляется возможность сразу же пояснять понятия окрестности и самого предела с помощью рисунков на плоскости, тем самым рассматривая функции двух и более переменных параллельно с функциями одной переменной. Изображение на прямой, скажем окрестностей точек, обладает значительно меньшей наглядностью.

Наш опыт показывает, что неизбежный «культурный шок», вызванный определением предела, проходит у слушателей легче в случае определения предела по базе. Здесь мы стараемся быть особенно деликатными, даем возможность привыкнуть к типичным рассуждениям теории пределов. С самого начала предупреждаем слушателей, что в решении большинстве задач, связанных с пределами, никакие $\varepsilon > 0$ даже не появляются. Если теория пределов не найдет понимания у студентов, то и весь курс, наверняка, вызовет неприятие.

Для улучшения восприятия текста читателями мы решили совсем не нумеровать формулы. Нумеруются только утверждения некоторых теорем и сами теоремы. В учебнике немало рисунков, все они приводятся без номера и подписи, поскольку сопровождаются поясняющим текстом.

Почти все главы заканчиваются упражнениями, большинство из которых предлагались студентам экономического факультета ГУ ВШЭ на практических занятиях, контрольных работах и экзаменах. Они успешно решались многими.

Авторы надеются, что данное пособие позволит проводить лекции в режиме консультации, со значительным сокращением затрат времени на записи формулировок. Перед очередной лекцией студентам рекомендовалось бы прочитать самостоятельно соответствующий материал учебника. Затем лектор лишь дополняет напечатанное свободными комментариями (особенно по поводу логики построения всего предмета), новыми примерами, обращается с вопросами к аудитории. Эта схема уже много лет успешно реализуется при преподавании в ГУ ВШЭ курса линейной алгебры на основе учебного пособия Е. Б. Бурмистровой, С. Г. Лобанова «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии» [5].

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Схема метода Гаусса

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество всех строк из n действительных чисел, т.е. $\mathbb{R}^n = \{\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\,\}$. В частности, при $n = 1$ получим $\mathbb{R}^1$ — множество всех вещественных чисел, при $n = 2$ получим $\mathbb{R}^2$ — множество всех пар вещественных чисел.

Строки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считаются *равными*, если $a_i = b_i$ для всех i, т.е. равны все их *компоненты*.

Определим на множестве $\mathbb{R}^n$ операции сложения строк и умножения строки на действительное число по следующим правилам:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Строка, состоящая из одних нулей, называется *нулевой* и обозначается через 0. Легко проверяется справедливость следующих свойств операций над строками:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a + 0 = a$;
4) уравнение $a + x = 0$ разрешимо для любого a;
5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
8) $1 \cdot a = a$.

Здесь латинские буквы означают произвольные строки из $\mathbb{R}^n$, греческие — произвольные вещественные числа. Знак «+» в левой части равенства 6 означает сложение чисел, а в правой части — сложение строк. В равенстве 7 в выражении $(\lambda\mu)$ — обычное умножение чисел.

Докажем, например, равенство 5: $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$. С этой целью заметим, что i-ми компонентами строк, стоящих в левой и правой частях этого равенства, являются $\lambda(a_i + b_i)$ и $\lambda a_i + \lambda b_i$ соответственно и их совпадение вытекает из справедливости закона дистрибутивности для действительных чисел.

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица, составленная из m записанных одна под другой n-мерных строк:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частности, при $m = 1$ получается матрица-строка, при $n = 1$ — матрица-столбец.

В случае $m = n$ матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Матрица, состоящая из нулевых строк, называется *нулевой* и обозначается через O, а матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*. Подчеркнем, что для каждого числа n существует своя единичная матрица, а для каждого размера $m \times$ $\times\, n$ — своя нулевая матрица. Две матрицы считаются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

В дальнейшем элементы матрицы, обозначенной некоторой большой буквой (скажем, A), будем, как правило, без специальных оговорок обозначать соответствующей малой буквой с индексами (в данном случае a_{ij}), обозначающими номер строки и столбца соответственно. Строку матрицы с номером i будем часто обозначать через a_i, а столбец с номером j — через $A^{(j)}$.

Любая система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

однозначно определяется матрицей

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

которая называется *расширенной матрицей системы*. Матрица, стоящая левее вертикальной черты, называется *матрицей системы*.

Строка $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ считается *решением* выписанной выше системы, если для всех i справедливы числовые равенства $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Решить систему — значит определить множество всех ее решений. Если множество решений пусто, то система уравнений называется *несовместной*.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если всякое решение первой системы является решением второй системы, и наоборот. Поэтому вместо данной системы можно решать ей эквивалентную.

Элементарными преобразованиями будем называть следующие преобразования матриц:

1) перемена местами двух строк матрицы (I тип);

2) прибавление к какой-либо строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число (II тип);

3) умножение некоторой строки на отличное от нуля число (III тип).

С помощью элементарных преобразований, как будет показано далее, могут быть решены многие задачи линейной алгебры. Укажем прежде всего на знаменитый метод решения произвольных систем линейных уравнений — метод Гаусса. Схема метода Гаусса приведена ниже. Компоненты схемы и первые примеры использования метода Гаусса рассматриваются в последующих подразделах данной главы.

1.2. Обоснование метода Гаусса

Доказательство многих теорем курса основано на применении метода (принципа) *математической индукции.* Приведем схему этого метода.

Пусть $\mathbb{N}$ *— множество всех натуральных чисел* $1, 2, 3, \ldots$; M *— некоторое его подмножество, о котором известно, что* $1 \in M$*, и если* $m \in M$*, то* $m + 1 \in M$*. Тогда* $M = \mathbb{N}$*.*

При некоторых подходах к построению арифметики метод математической индукции является теоремой, при других подходах — это аксиома. Мы не будем приближаться к основаниям арифметики, выяснять, в силу чего истинна схема метода математической индукции.

Пусть m — натуральное число, входящее в формулировку некоторой теоремы. Если теорема верна при $m = 1$ и из справедливости теоремы для некоторого m всегда следует ее справедливость для $(m + 1)$, то теорема верна для всех натуральных чисел. Именно в такой форме, как правило, применяется метод математической индукции. Здесь $M = \{m \in \mathbb{N} : \text{для } m \text{ теорема верна}\}$.

Теорема 1.1 (об обратимости элементарных преобразований). *Если матрица* A' *получается из матрицы* A *с помощью конечного числа элементарных преобразований, то и, наоборот, матрицу* A *можно получить из матрицы* A' *с помощью конечного числа элементарных преобразований.*

Доказательство. Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к A при переходе к A'. Проведем доказательство индукцией по t.

Пусть $t = 1$, т.е. проделано только одно преобразование.

Если это преобразование I типа, т. е. переставлены две строки, то, переставляя эти строки еще раз, придем от A' к A.

Если это преобразование II типа, то

$$(i\text{-я строка } A') = (i\text{-я строка } A) + \lambda(j\text{-я строка } A),$$

и тогда

$$(i\text{-я строка } A) = (i\text{-я строка } A') + (-\lambda)(j\text{-я строка } A').$$

Если это преобразование III типа, то умножением на обратное число можно перейти от A' к A.

Пусть теперь известно, что теорема справедлива для некоторого $t \geq 1$, а от A к A' можно перейти за $(t+1)$ элементарных преобразований.

Обозначим через C матрицу, получаемую из A после первого преобразования. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от A' к C, а как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\text{первое преобразование}"] & C \arrow[l, shift left, "\text{случай } t=1"] \arrow[r, shift left, "\text{последние } t \text{ преобразований}"] & A' \arrow[l, shift left, "\text{по предположению индукции}"]
\end{tikzcd}$$

Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от A' к A, что завершает доказательство. ■

Теорема 1.2 (об эквивалентности систем линейных уравнений). *Пусть $\bar{A}$ и $\bar{A}'$ — расширенные матрицы систем линейных уравнений. Если матрицу $\bar{A}'$ можно получить из матрицы $\bar{A}$ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что всякое решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$ является решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$, так как в силу теоремы 1.1 будет верно и обратное.

Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к $\bar{A}$ при переходе к $\bar{A}'$.

При $t = 1$, если это преобразование I типа, то в соответствующей системе только поменяются местами два уравнения. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях II типа к i-й строке прибавляется j-я строка, умноженная на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\bar{A}'$ имеет вид $(a_{i1} + \lambda a_{j1}, \ldots, a_{in} + \lambda a_{jn}, b_i + \lambda b_j)$. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$. Будет ли оно решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но $(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1+\cdots+(a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n = (a_{i1}\alpha_1+\cdots+a_{in}\alpha_n)+\lambda(a_{j1}\alpha_1+ + \cdots + a_{jn}\alpha_n) = b_i + \lambda b_j$.

Случай преобразования III типа рассматривается аналогично.

Завершение доказательства теоремы 1.2 можно провести, как и при доказательстве теоремы 1.1. ■