УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

СЕРИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

А. Н. КАНАТНИКОВ, А. П. КРИЩЕНКО

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по естественно-научным, техническим
и экономическим направлениям и специальностям

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2009

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73
К82

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.И.Гаврилов* (Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова);
д-р физ.-мат. наук, проф. *А.Н.Сиротин* (кафедра теории вероятностей Московского авиационного института)

Канатников А. Н., Крищенко А.П.

К82 Аналитическая геометрия : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А.Н.Канатников, А.П.Крищенко. — М. : Издательский центр «Академия», 2009. — 208 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

ISBN 978-5-7695-4580-1

В книге изложены основные понятия векторной алгебры и аналитической геометрии. В рамках векторной алгебры рассмотрены линейные операции над векторами, понятие базиса, скалярное, векторное и смешанное произведения, использование векторной алгебры в решении геометрических задач. В рамках аналитической геометрии представлены прямые на плоскости, прямые и плоскости в пространстве, кривые и поверхности второго порядка.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я73

ISBN 978-5-7695-4580-1

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a \in A$, $A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a)

$A \subset B$, $B \supset A$ — подмножество A включено в множество B (B включает A)

$A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует B (B — необходимое условие для A, а A — достаточное условие для B)

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$|x|$ — абсолютная величина (модуль) числа x

$k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно целые значения от 1 до n включительно

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$

$\prod\limits_{m=1}^{n} a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_n$

AB — отрезок, соединяющий точки A и B

$|AB|$ — длина отрезка AB

$\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ — геометрический вектор с началом в точке A и концом в точке B

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overline{AB}|$ — длина геометрического вектора

$\mathbf{a}$, $|\mathbf{a}|$ — (свободный) вектор и его длина

$\mathbf{O}$ — нулевой вектор

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ — сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\lambda\mathbf{a}$ — произведение вектора $\mathbf{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$

$\text{пр}_{\mathbf{l}}\mathbf{a}$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{l}$

$\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $L_1 \perp L_2$ — векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, прямые L_1 и L_2 перпендикулярны

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $L_1 \parallel L_2$ — векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, прямые L_1 и L_2 параллельны

V_1, V_2, V_3 — пространство векторов на прямой, пространство векторов на плоскости, пространство всех свободных векторов

$\{x; y\}$, $\{x; y; z\}$ — запись вектора на плоскости (V_2) и в пространстве (V_3) с помощью его координат в фиксированном базисе

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — (правый) ортонормированный базис в V_2 и V_3

$\mathbf{ab}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$\mathbf{abc}$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

Oxy, Oij ($Oxyz$, Oijk) — (правая) прямоугольная система координат на плоскости (в пространстве)

$M(x; y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината)

$M(x; y; z)$ — точка M пространства с координатами x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагается курс аналитической геометрии, традиционно преподаваемый в большинстве вузов в первом семестре. Предлагаемый учебный материал разделен на три части: векторную алгебру (гл. 1 и 2), теорию прямых и плоскостей (гл. 3, 4, 5), теорию кривых и поверхностей второго порядка (гл. 6 и 7).

Векторная алгебра тесно переплетается с элементарной геометрией и представляет собой, по существу, современный язык той части геометрии, которая связана с понятиями параллельных прямых и подобия. Предполагается, что читатель хорошо знаком с такими терминами, как точка, прямая, плоскость, и знает их свойства (в частности, признаки параллельности прямых, признаки равенства и подобия треугольников, признаки параллелограмма и т.д.).

Аналитическая геометрия, основным методом которой является метод координат, представлена во второй и третьей частях книги.

Понятие системы координат (гл. 3), так же как и многие факты аналитической геометрии, известно любому студенту еще из школьной программы. Изучение этого раздела геометрии в вузе отличается бóльшей строгостью и систематичностью. В книге изложение аналитической геометрии, в частности введение декартовой системы координат, опирается на векторную алгебру. В изложении материала по теории прямых и плоскостей (гл. 4 и 5) активно используется язык векторной алгебры.

Материал третьей части книги, посвященный кривым и поверхностям второго порядка, строится на геометрических свойствах этих объектов, а не на исследовании алгебраического уравнения второй степени.

При отборе и изложении материала авторы стремились предусмотреть возможные различия в объеме его изучения в разных учебных заведениях. Сложные и второстепенные вопросы, не всегда входящие в программы, даны в виде дополнений в конце глав.

Книга имеет развитый аппарат для поиска нужной информации, позволяющий использовать ее как справочник. Важнейшие понятия, являющиеся ключевыми для понимания материала учебного пособия, выделены полужирным курсивом.

Большинство используемых обозначений дано в разделе «Основные обозначения». В приложении приведены написание и русское произношение букв латинского и греческого алфавитов.

Перед изучением этой книги предлагается в целях самоконтроля выполнить несколько несложных заданий из раздела «Задания для самопроверки». В каждом задании курсивом выделены ключевые термины, значение которых должен знать студент.

Задания для самопроверки

1. Что такое *абсолютная величина* (*модуль*) числа?

2. Имеют ли операции сложения и умножения действительных чисел свойства *коммутативности*, *ассоциативности*, и в чем состоит их свойство *дистрибутивности*?

3. Что понимают под *необходимым условием*, *достаточным условием*, *критерием* некоторого свойства?

4. Укажите *область определения* и *область значений* функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$. Постройте *график* этой *функции*.

5. Какие *прямые* называют *параллельными*? Назовите случаи взаимного расположениея двух прямых: а) на плоскости; б) в пространстве.

6. Сколько *прямых*, *перпендикулярных данной прямой*, можно провести через данную точку?

7. Что называют: а) углом между прямыми на плоскости; б) углом между прямой и плоскостью в пространстве?

8. Сформулируйте *признаки равенства треугольников*.

9. В *треугольнике* известны длины сторон $a = 2$ и $b = 3$, а также угол $\varphi = 30^\circ$ между этими сторонами. Найдите *площадь* этого *треугольника*.

10. Сформулируйте *теорему Пифагора*.

11. Сформулируйте признаки *параллелограмма*. Что такое *диагонали параллелограмма*?

12. Какое соотношение называют *неравенством треугольника*?

13. Запишите уравнение *окружности*, *центр* которой имеет координаты $x = 1$, $y = -2$, а *радиус* равен 3.

14. В *треугольнике* ABC известны углы $\angle A = 45^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$. Определите отношения длин сторон BC и AC.

15. Что называют *прямоугольными координатами точки* на плоскости, в пространстве?

ЧАСТЬ I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА 1

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1.1. Векторные и скалярные величины

В прикладных науках оперируют величинами различного характера. Обратимся к величинам, встречающимся в физике и механике. Такие величины, как масса и объем, характеризуются количественным значением, которое по отношению к некоторому эталону (единице измерения) задается действительным числом.

Эти величины называются ***скалярными***. Скорость, ускорение, сила характеризуются не только количественным значением, но и направлением. Поэтому они называются ***векторными величинами***.

Скалярные и векторные величины не исчерпывают всех возможных вариантов. Например, свойства кристаллических тел передавать теплоту и деформироваться под действием нагрузки не удается описать с помощью скалярных и векторных величин.

Для таких свойств в физике и механике используют более сложные тензорные величины.

Перейдем к строгим определениям и понятиям.

Определение 1.1. ***Геометрическим вектором*** (также ***направленным отрезком***) называется любой отрезок, на котором выбрано одно из двух возможных направлений (рис. 1.1).

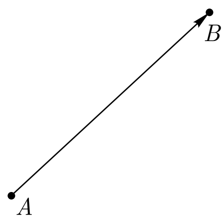


Рис. 1.1

Любой отрезок однозначно определяется своими концами, поэтому одно из двух возможных направлений для данного отрезка можно задать, указав конец отрезка, от которого надо начать движение в заданном направлении, для того чтобы, двигаясь по отрезку, попасть в его другой конец. Это позволяет определить геометрический вектор просто как упорядоченную пару точек: первая точка в паре называется *началом геометрического вектора*, а вторая — его *концом*. Начало геометрического вектора называется также *точкой* его *приложения*.

Обозначение геометрических векторов отражает указанную интерпретацию: если точка A является началом геометрического вектора, а точка B — его концом, то геометрический вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Второе обозначение явно подчеркивает, от какого конца отрезка к какому происходит движение в заданном направлении.

В первом варианте направление определяется порядком букв, обозначающих концевые точки, а черта сверху предназначена для выделения геометрических векторов среди других геометрических объектов.

Важной характеристикой геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ является его *модуль*, или *длина*, $|\overrightarrow{AB}|$. Длина геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине $|AB|$ отрезка, соединяющего начало A и конец B этого вектора. Длина геометрического вектора может выражаться любым неотрицательным числом[1].

Пример 1.1. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Вектор $\overline{BC}$, направленный по гипотенузе треугольника ABC, в соответствии с теоремой Пифагора имеет длину (модуль), равную 5.

Геометрический вектор, длина которого положительна, называется *ненулевым*. Геометрический вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***, или ***нуль-вектором***, и обозначается $\mathbf{0}$. Геометрический вектор, длина которого равна единице, называется ***ортом***, или ***единичным***.

Для нуль-вектора понятие направления теряет смысл, так как начало и конец у него совпадают. Однако такому геометрическому вектору можно приписать произвольное направление, которое устанавливается в зависимости от конкретной ситуации.

[1]Длина является размерной величиной, т. е. выражается числом по отношению к некоторому эталону. Однако в математических дисциплинах не принято учитывать размерность. Считается, что эталон длины (а также площади, объема и т. п.) задан и неизменен.

1.2. Типы векторов и их взаимное расположение

Определение 1.2. Два геометрических вектора называются ***коллинеарными векторами***, если они лежат на одной прямой[1] или на параллельных прямых.

Например, в трапеции $ABDC$ (рис. 1.2, a) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

Про пару коллинеарных геометрических векторов иногда говорят, что один из них коллинеарен другому.

Все пары коллинеарных геометрических векторов можно разделить на две группы:

- *однонаправленные* (или *сонаправленные*) *коллинеарные геометрические векторы*, имеющие совпадающие направления;
- *противоположно направленные коллинеарные геометрические векторы*, имеющие противоположные направления.

Если коллинеарные геометрические векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на одной прямой, то точки A, B, C и D образуют трапецию. В случае однонаправленных геометрических векторов отрезки AC и BD, соединяющие соответственно начала двух векторов и их концы, определяют боковые стороны трапеции (см. рис. 1.2, a). Если же эти геометрические векторы противоположно направленные, то отрезки AC и BD являются диагоналями трапеции (рис. 1.2, $б$).

По определению считается, что нуль-вектор коллинеарен любому другому. Определение 1.2 распространяется очевидным образом на любое число геометрических векторов.

Определение 1.3. Три геометрических вектора называются ***компланарными***, если они лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Это определение теряет смысл, если его сформулировать для двух геометрических векторов, потому что любые два геометрических вектора лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости. Однако можно говорить о четырех компланарных геометрических векторах или об их большем числе.

Пример 1.2. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{B'C'}$ компланарны, поскольку лежат в параллельных плоскостях, определяемых противоположными гранями параллелепипеда (рис. 1.3).

[1] Формулировка «геометрический вектор лежит на прямой» означает, что начало и конец вектора лежат на этой прямой.

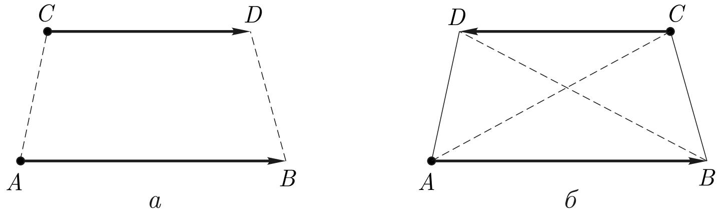


Рис. 1.2

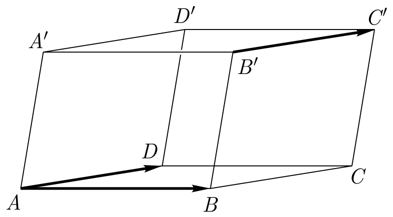


Рис. 1.3

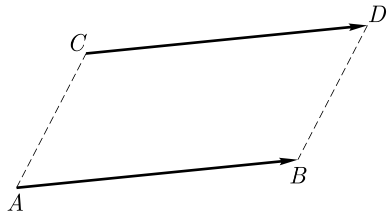


Рис. 1.4

Определение 1.4. Два геометрических вектора называются ***равными векторами***, если:

- они коллинеарны и однонаправлены;
- их длины совпадают.

Отметим, что если равные геометрические векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на одной прямой, то точки A, B, D, C являются вершинами параллелограмма (рис. 1.4).

Смысл определения 1.4 в том, что равные геометрические векторы могут иметь различные точки приложения, но задают одно и то же направление и имеют одинаковую длину. В случае, когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, считается, что задан ***свободный вектор***. Термин подчеркивает, что точка приложения геометрического вектора может меняться произвольно. В дальнейшем для удобства свободные векторы будем называть просто ***векторами***. Векторы обозначают одной строчной буквой с дополнительной чертой или стрелкой вверху: $\overline{a}$ или $\overrightarrow{a}$. Распространенным является также обозначение вектора полужирным шрифтом $\mathbf{a}$, которое в дальнейшем и будет использоваться.

Разный характер действия векторов в прикладных задачах приводит к необходимости рассматривать другие типы векторов. Например, вектор угловой скорости и вектор силы, действующей на абсолютно твердое тело, можно перемещать только вдоль прямых, на которых они находятся. Такие векторы называются ***скользящими векторами***. Наконец, геометрические векторы, точка приложения которых не может изменяться, называются еще ***связанными векторами***. К ним относятся скорости в потоке жидкости или газа.

В зависимости от учета тех или иных конкретных условий одну и ту же векторную величину иногда удобно рассматривать как свободный, скользящий или связанный вектор. Например, вектор ускорения земного притяжения является связанным вектором, поскольку его модуль и направление зависят от расположения точки приложения относительно центра Земли. Поэтому при расчете траектории полета, например с Земли на Луну, его считают связанным вектором. Однако в задаче о движении снаряда при стрельбе на небольшую по сравнению с радиусом Земли дальность изменения вектора ускорения земного притяжения вдоль траектории снаряда незначительны, и его принимают постоянным по модулю и направленным вертикально вниз, т. е. считают свободным вектором. Учет кривизны поверхности Земли приведет к необходимости считать этот вектор уже скользящим, т. е. постоянным при перемещениях лишь вдоль радиуса к центру Земли.

Замечание. Многие понятия, связанные с геометрическими векторами, переносятся и на свободные векторы. Так, говорят о *начале* (*точке приложения*) *вектора*, *конце вектора*, *модуле* (*длине*) *вектора*. Различают *векторы ненулевые* (включая *единичные*, или *орты*) и *нулевые* (*нуль-векторы*), *векторы коллинеарные* и *векторы компланарные*. Коллинеарные векторы могут быть *однонаправленными* (*сонаправленными*) и *противоположно направленными*.

1.3. Линейные операции и их свойства

Над векторами можно выполнять различные операции. Свойства этих операций определяют правила преобразования выражений, содержащих векторные величины. Эти правила и составляют предмет ***векторной алгебры***.

Обсуждение векторных операций следует начать со сложения векторов и умножения вектора на число. Эти операции часто объединяют общим термином ***линейные операции***.

Определение 1.5. ***Суммой*** $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ двух ***векторов*** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют вектор $\mathbf{c}$, построенный по следующему ***правилу треугольника***. Выбрав для вектора $\mathbf{a}$ *начало*, совместим с концом этого вектора начало вектора $\mathbf{b}$ (рис. 1.5). Тогда суммой этих векторов будет вектор $\mathbf{c}$, начало которого совпадает с началом $\mathbf{a}$, а конец — с концом $\mathbf{b}$.

Замечание 1. Наряду с правилом треугольника для построения суммы векторов можно использовать ***правило параллелограмма***. Выберем для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ общее начало и построим на этих векторах параллелограмм (рис. 1.6). Тогда диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов, определяет их сумму. Отметим, что если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то их сумму по правилу параллелограмма определить нельзя, а правило треугольника в этом случае применимо.

Замечание 2. В определении 1.5 существует произвол в выборе точки приложения векторов. Чтобы определение было корректным, необходимо убедиться, что результаты, получаемые с различными точками приложения, равны между собой. Убедитесь в этом самостоятельно!

Операция сложения векторов по своим свойствам напоминает операцию сложения чисел.

1. Сложение векторов коммутативно: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

Если складываемые векторы неколлинеарны, то свойство непосредственно вытекает из правила параллелограмма, так как в этом правиле порядок векторов не играет роли. Если же векторы коллинеарны, то их сложение сводится к сложению или вычитанию их длин в зависимости от того, являются ли складываемые векторы однонаправленными (рис. 1.7, *а*) или противоположно направленными (рис. 1.7, *б*).

2. Сложение векторов ассоциативно: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

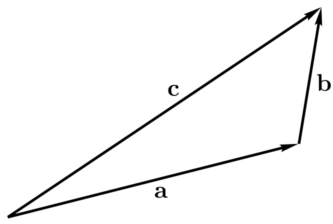


Рис. 1.5

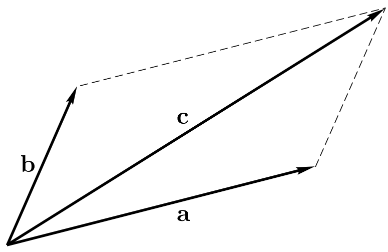


Рис. 1.6

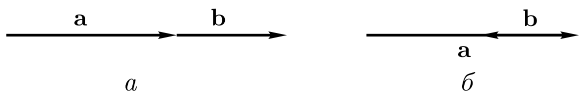


Рис. 1.7

Доказать это свойство проще всего с помощью правила треугольника. Выберем в качестве начала вектора $\mathbf{a}$ точку A (рис. 1.8), и пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Совместим начало вектора $\mathbf{b}$ с точкой B, и пусть $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Наконец, начало вектора $\mathbf{c}$ совместим с концом C вектора $\mathbf{b}$, и пусть тогда $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$.

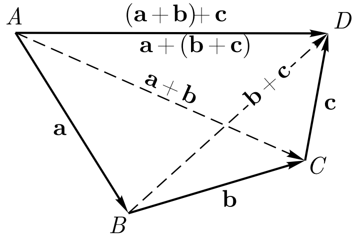


Рис. 1.8

Непосредственно из построения получаем:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

т. е. геометрический вектор $\overrightarrow{AD}$ изображает и левую часть доказываемого равенства, и правую.

3. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора $\mathbf{a}$ выполняется равенство $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что указанному условию удовлетворяет нулевой вектор. Проверку удобно проводить с помощью правила треугольника.

4. Для любого вектора $\mathbf{a}$ существует такой вектор $\mathbf{b}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Действительно, таковым является вектор $(-\mathbf{a})$, ***противоположный*** вектору $\mathbf{a}$, т. е. вектор, коллинеарный $\mathbf{a}$, такой же длины, что и $\mathbf{a}$, но противоположно направленный. Если в качестве точки приложения этого вектора выбрать конец вектора $\mathbf{a}$, то конец противоположного вектора совпадет с началом вектора $\mathbf{a}$. Согласно правилу треугольника суммой векторов $\mathbf{a}$ и $(-\mathbf{a})$ будет вектор с совпадающими началом и концом, т. е. нулевой вектор.

5. Для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. При этом вектор $\mathbf{x}$ определен однозначно.

Указанному условию удовлетворяет вектор $(-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$, так как с учетом перечисленных ранее свойств

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a} + \big((-\mathbf{a}) + \mathbf{b}\big) = \big(\mathbf{a} + (-\mathbf{a})\big) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Если вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$, то, прибавив слева к обеим частям последнего равенства вектор $(-\mathbf{a})$, получим $(-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} + \mathbf{x}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. Используя свойства коммутативности и ассоциативности, преобразуем левую часть равенства:

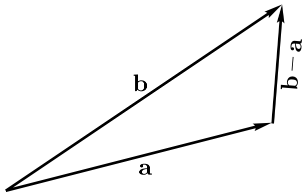


Рис. 1.9

$$(-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} + \mathbf{x}) = ((-\mathbf{a}) + \mathbf{a}) + \mathbf{x} =$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

В результате рассматриваемое равенство принимает вид: $\mathbf{x} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. Значит, вектор $\mathbf{x}$ определен однозначно.

Это свойство позволяет ввести операцию вычитания векторов.

Определение 1.6. ***Разностью*** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ***векторов*** $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ называют такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

С алгебраической точки зрения переход от $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ к $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (в соответствии с определением 1.6) означает, что при переносе вектора в другую часть равенства у него надо поменять знак.

Корректность определения разности векторов, т. е. существование и единственность вектора $\mathbf{x}$, устанавливает свойство **5**. Практически для вычисления разности векторов можно воспользоваться правилом треугольника. Совместим начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда вектор с началом в конце вектора $\mathbf{a}$ и концом, совпадающим с концом $\mathbf{b}$, равен разности $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ этих векторов (рис. 1.9).

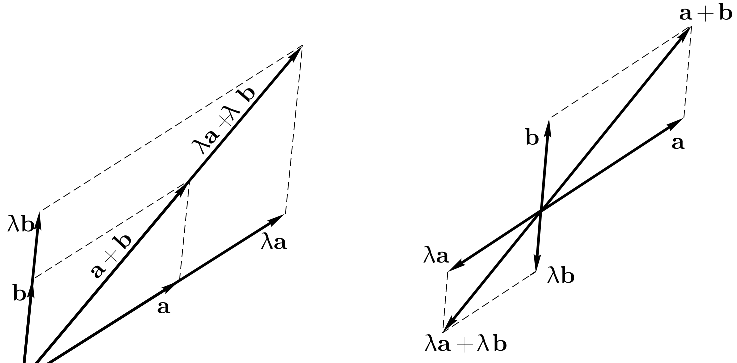
Операцию вычитания векторов также относят к линейным, так как она определяется операцией сложения и является обратной сложению.

Определение 1.7. ***Произведением вектора*** $\mathbf{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\lambda\mathbf{a}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, с длиной $|\lambda||\mathbf{a}|$, однонаправленный с $\mathbf{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направленный при $\lambda < 0$.

Замечание. Если $\lambda = 0$, то согласно этому определению вектор $0\mathbf{a}$ должен иметь длину $0|\mathbf{a}| = 0$, т. е. должен быть нулевым вектором. Поэтому, хотя остальные характеристики в определении и не определены (коллинеарность, направленность), произведение вектора на число 0 определено однозначно: $0\mathbf{a}$ есть нулевой вектор.

Пример 1.3. Произведение вектора $\mathbf{a}$ на число (-1) есть вектор, противоположный $\mathbf{a}$, т. е. $(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a})$. Вектор $(-1)\mathbf{a}$, а также векторы $2\mathbf{a}$, $(-3)\mathbf{a}$ показаны на рис. 1.10.

Рис. 1.10



а *б*

Рис. 1.11

Операция умножения вектора на число обладает свойством ассоциативности, а совместно с операцией сложения она удовлетворяет двум свойствам дистрибутивности.

6. Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$.

Действительно, обе части равенства представляют собой векторы, коллинеарные исходному вектору **a**. Поэтому равенство будет верным, если совпадут длины векторов и их направления. Равенство длин векторов очевидно. Если числа λ и μ имеют один и тот же знак, то векторы в обеих частях будут однонаправлены с вектором **a**. Если же λ и μ имеют противоположные знаки, то оба вектора в равенстве являются противоположно направленными по отношению к **a**. Итак, в любом случае в равенстве стоят векторы одного направления и одинаковой длины, т. е. равные векторы.

7. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно векторов: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

При $\lambda = 0$ свойство очевидно, так как в этом случае слева будет нулевой вектор (произведение вектора на число 0), а справа — сумма двух нулевых векторов. Если $\lambda \neq 0$, свойство вытекает из правила параллелограмма и свойств подобных параллелограммов. На рис. 1.11 представлены случаи: *а* — для $\lambda > 0$, *б* — для $\lambda < 0$.

8. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно чисел: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.

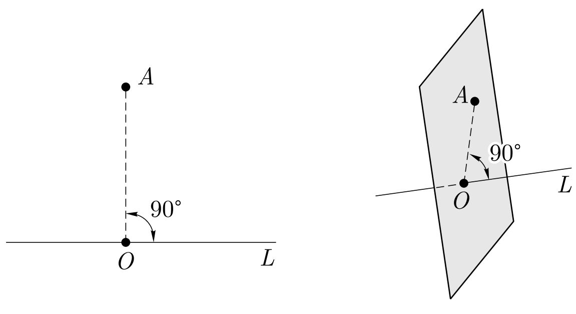
В указанном равенстве три коллинеарных вектора. Поэтому доказательство сводится к подсчету длин векторов, которым присвоены знаки, учитывающие направление. Если λ и μ имеют положительные знаки, то все три вектора в равенстве имеют одно направление, совпадающее с направлением вектора $\mathbf{a}$. При сложении этих векторов в правой части равенства их длины складываются, а доказываемое равенство становится равносильным следующему: $(\lambda+\mu)|\mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}| + \mu|\mathbf{a}|$. В случае когда λ и μ отрицательны, результат аналогичный.

Пусть λ и μ имеют противоположные знаки. Для определенности будем считать, что $\lambda > 0$, $\mu < 0$. При сложении векторов $\lambda\mathbf{a}$ и $\mu\mathbf{a}$ их длины вычитаются, так как векторы имеют противоположное направление. Получаемый при этом вектор будет однонаправленным с $\mathbf{a}$ при $|\lambda| > |\mu|$ и противоположно направленным при $|\lambda| < |\mu|$. Его длина (согласно определению произведения вектора на число) равна $|\lambda + \mu||\mathbf{a}|$. Учитывая направление этого вектора, получаем $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$, т. е. доказываемое равенство верно и при противоположных знаках коэффициентов λ и μ.

1.4. Ортогональная проекция

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка A. Опустим из точки A на прямую L перпендикуляр (рис. 1.12, *а*). Его основание (точка O) называется ***ортогональной проекцией точки A на прямую L***. Если прямая L и точка A заданы в пространстве, то ортогональной проекцией точки A на прямую L называется точка O пересечения прямой L с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через точку A (рис. 1.12, *б*). Если точка A лежит на прямой L, то она совпадает со своей ортогональной проекцией на L.

Для вектора $\overrightarrow{AB}$ (на плоскости или в пространстве) можно построить ортогональные проекции на прямую L его начала и конца (рис. 1.13). Вектор $\overrightarrow{O_AO_B}$, соединяющий проекции O_A и



а *б*

Рис. 1.12

O_B и лежащий на прямой L, называется ***ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L***.

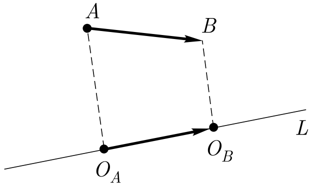


Рис. 1.13

Прямая, на которой задано одно из двух возможных направлений, называется ***осью***. Выбранное направление на оси показывают с помощью стрелки на соответствующем конце оси. Ортогональную проекцию $\overrightarrow{O_AO_B}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l можно полностью описать длиной вектора $\overrightarrow{O_AO_B}$, приписав ей знак, указывающий направление вектора. Если направление $\overrightarrow{O_AO_B}$ совпадает с заданным направлением оси, то используют знак «плюс», а если направление вектора противоположно направлению оси, то используют знак «минус». Длина вектора $\overrightarrow{O_AO_B}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называется ***ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l*** и обозначается $\text{пр}_{\mathbf{l}}\mathbf{a}$.

Обратим внимание на то, что ортогональной проекцией вектора на ось является число, а ортогональной проекцией вектора на прямую — вектор. Чтобы вектору соответствовало число как его проекция, на прямой нужно выбрать одно из двух возможных направлений.

Каждый ненулевой вектор $\mathbf{l}$ однозначно определяет ось: его можно представить расположенным на некоторой прямой и задающим на ней направление. Ортогональная проекция вектора на такую ось называется ***ортогональной проекцией вектора на направление*** вектора $\mathbf{l}$.

Угол между направлениями двух ненулевых векторов называется ***углом между*** этими ***векторами***. Угол может изменяться в пределах от 0 до π. Крайние значения 0 и π отвечают коллинеарным векторам, соответственно однонаправленным и противоположно направленным. Если хотя бы один из двух векторов является нулевым, то угол между такими векторами не определен. Удобно, однако, считать, что в этом случае угол имеет произвольное значение. Так, нулевой вектор коллинеарен любому другому, что формально соответствует углу 0 (или π). Конкретное значение, приписываемое углу между нулевым вектором и каким-либо другим, выбирают исходя из конкретной ситуации.

Теорема 1.1. Ортогональная проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление ненулевого вектора $\mathbf{l}$ равна длине $|\mathbf{a}|$, умноженной на косинус угла φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{l}$, т. е.