УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Серия «Прикладная математика и информатика»

И. Н. СЕРГЕЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебник

Допущено
Учебно-методическим объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
«Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»,
«Прикладная математика и информатика»,
«Фундаментальная информатика и информационные технологии»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73
С322

Р е ц е н з е н т ы:

д-р физ.-мат. наук, проф. *Г.А. Чечкин* (кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова);
д-р физ.-мат. наук, проф., акад. РАН *В.А. Ильин* (зав. кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова)

Сергеев И. Н.

С322 Дифференциальные уравнения : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / И. Н. Сергеев. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 288 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

ISBN 978-5-7695-9606-3

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлениям подготовки «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (квалификация «бакалавр»).

Материал учебника знакомит с геометрической интерпретацией уравнения первого порядка, с первыми интегралами, особыми точками и предельными циклами автономных систем, с теорией линейных уравнений и систем, в том числе с постоянными и периодическими коэффициентами, с вопросами существования, единственности и продолжаемости решений, их непрерывности и дифференцируемости по параметру, устойчивости по Ляпунову, а также с вопросами существования и единственности решения задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка. Даны точные определения, аккуратно сформулированы и доказаны утверждения, строго обоснованы наиболее важные методы решения задач. Приведены все необходимые теоретические сведения, сопутствующие понятия и факты из смежных разделов математики. Предложены задачи для самостоятельного решения, позволяющие глубже проникнуть в прочитанный материал.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-7695-9606-3

в настоящий курс не может обойти стороной основное его понятие — *обыкновенное дифференциальное уравнение*, т. е. запись вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Не уточняя пока, откуда и куда действует функция F, отметим лишь, что:

• *порядком* уравнения (1) называется участвующее в его записи значение $n \in \mathbb{N}$ (при условии, что последний аргумент функции F не является фиктивным);

• переменная x в уравнении (1), служащая первым аргументом функции F, — скалярная[1], а все остальные аргументы этой функции могут быть и векторными, принимающими значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ (с одним и тем же значением $m \in \mathbb{N}$).

I. Решение дифференциального уравнения. Запись (1) приобретает смысл уравнения только после того, как разъяснено, какой объект в нем является искомым.

Решением уравнения (1) назовем любую функцию

$$\mathsf{y}\colon I \to \mathbb{R}^m,$$

определенную на каком-либо *интервале*[2]

$$I \equiv (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} \equiv \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

и удовлетворяющую тождеству

$$F\left(x, \mathsf{y}(x), \mathsf{y}'(x), \ldots, \mathsf{y}^{(n)}(x)\right) = 0, \quad x \in I.$$

Интегральными кривыми уравнения (1) будем называть графики его решений.

[1] Именно поэтому уравнение (1) называется обыкновенным (в отличие от *уравнения в частных производных*).

[2] Т. е. на открытом связном подмножестве I числовой прямой $\mathbb{R}$ (в дальнейшем буква I, как правило, будет обозначать интервал). Таким образом, в настоящем курсе рассматриваются только *классические* решения.

II. Общее решение. Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n считается полностью решенным, если найдено его *общее решение*, т. е. множество всех решений, заданное неявно уравнением

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

или, что более предпочтительно, явной формулой

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n).$$

При этом подразумевается, что:

- если запись (2) для какого-либо набора констант $C_1, \ldots, C_n$ явно или неявно задает какую-либо функцию $y = \mathsf{y}(x)$, определенную на каком-либо интервале, то эта функция — обязательно решение уравнения (1);
- и наоборот, любое решение уравнения (1) задается уравнением (2) при некоторых значениях констант $C_1, \ldots, C_n$.

III. Обозначения и особенности нумерации. Здесь и ниже одной и той же буквой, но разного начертания, обозначены и переменные, и подставляемые вместо них функции, что оправдано сходством самих объектов[1]. Так, переменным $y, y', x, \dot{x}, z, u \ldots$ в дальнейшем соответствуют функции $\mathsf{y}, \mathsf{y}', \mathsf{x}, \dot{\mathsf{x}}, \mathsf{z}, \mathsf{u} \ldots$

Отметим, кстати, что производная функции по t, как правило, обозначается точкой, а по x или по какой-либо другой переменной — штрихом.

Нумерация всех утверждений (лемм, теорем и следствий) — сплошная, равно как и формул, а нумерация определений — двойная, с номером главы впереди.

Значками ► и ■ всюду отмечены, соответственно, начало и конец доказательства.

Некоторые разделы помечены звездочкой — это означает, что при недостатке времени их позволительно изучать менее глубоко (например, ознакомившись только с формулировками утверждений, которые, возможно, подробно разбираются в других математических курсах) или даже опустить совсем.

[1]Кстати, в практических выкладках их обычно не различают вовсе.

Глава 1

ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Уравнение в дифференциалах

имеет вид

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

где функции $M, N\colon G \to \mathbb{R}$ нигде в области G не обнуляются одновременно:

$$(M(x,y), N(x,y)) \neq (0,0), \quad (x,y) \in G. \tag{4}$$

Забегая вперед, поясним, что дифференциальное уравнение более привычного вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{5}$$

является частным случаем уравнения в дифференциалах (3), в котором коэффициент при dy отличен от нуля.

I. Поле направлений. С каждой точкой $(x,y) \in G$ свяжем *касательную плоскость*[1] $T_{(x,y)}$ с координатами (dx, dy) (рис. 1): ее начало координат совместим с точкой (x,y), а оси координат будем считать параллельными соответствующим осям координат области G.

Определение 1.1. В области $G \subset \mathbb{R}^2$ можно задать:

• *векторное поле* v, т. е. отображение, которое каждой точке $(x,y) \in G$ ставит в соответствие выходящий из нее вектор $v(x,y) \in T_{(x,y)}$;

[1]Имеющую структуру *векторного* пространства $\mathbb{R}^2$.

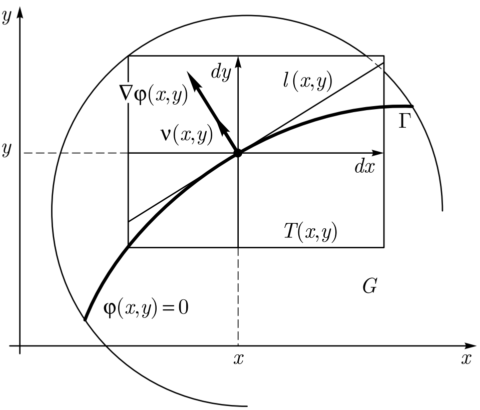


Рис. 1. Направление, нормаль и градиент в точке

- *поле направлений*[1] l, т. е. отображение, которое каждой точке $(x, y) \in G$ ставит в соответствие проходящую через нее прямую $l(x, y) \subset T_{(x,y)}$.

Уравнение (3) естественным образом определяет в области G следующее поле направлений l: для каждой фиксированной точки $(x, y) \in G$ само равенство (3), при условии (4), задает в координатах (dx, dy) не что иное, как прямую, проходящую через начало координат (т. е. графически через точку (x, y); рис. 1), — ее и принимаем за прямую $l(x, y)$ поля направлений.

С уравнением в дифференциалах свяжем также еще и векторное поле $\nu = (M, N)$, которое назовем полем *нормалей*, поскольку для каждой точки $(x, y) \in G$ вектор $\nu(x, y)$ служит нормалью к прямой $l(x, y)$.

II. Интегральная кривая. С геометрической точки зрения решение представляет собой интегральную кривую, называемую так именно по той причине, что само уравнение является дифференциальным.

Определение 1.2. Кривую $\Gamma \subset G$ назовем *интегральной кривой* поля направлений l (или уравнения, задающего это поле), если она в каждой своей точке $(x, y) \in \Gamma$ касается прямой $l(x, y)$.

[1]Правильнее было бы его назвать *полем прямых*, так как направления-то на них как раз не указываются.

В этом определении мы уже предполагаем, что кривая Γ имеет в каждой своей точке касательную. Более того, сузим множество возможных интегральных кривых еще сильнее, а именно: ограничимся только такими кривыми, которые задаются одним уравнением[1]:

$$\Gamma = \{(x,y) \in G' \mid \ \varphi(x,y) = 0\}, \tag{6}$$

где скалярная функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$, определенная в некоторой подобласти $G' \subset G$, имеет на Γ ненулевой *градиент*

$$\nabla\varphi(x,y) \equiv (\varphi'_x(x,y), \varphi'_y(x,y)) \neq 0, \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Из курса математического анализа известно (в частности, в силу теоремы о неявной функции), что:

• при указанных условиях множество точек (6) есть действительно кривая[2], которая *локально*, т. е. в достаточно малой окрестности $U \subset G$ любой своей точки (x_0, y_0), задается уравнением $y = \mathsf{y}(x)$ или $x = \mathsf{x}(y)$ в зависимости от того, какая из производных $\varphi'_y(x_0, y_0)$ или $\varphi'_x(x_0, y_0)$ отлична от нуля;

• касательная к этой кривой в каждой точке $(x,y) \in \Gamma$ существует и задается в плоскости $T_{(x,y)}$ уравнением

$$d\varphi(x,y) \equiv \varphi'_x(x,y)\,dx + \varphi'_y(x,y)\,dy = 0;$$

• вектор $\nabla\varphi(x,y) \in T_{(x,y)}$, являясь нормалью к последней прямой, перпендикулярен к касательной (или, что по определению то же, к самой кривой).

Лемма 1. *Кривая* (6) *является интегральной для уравнения* (3) *тогда и только тогда, когда в каждой ее точке* (x,y) *векторы* $\nabla\varphi(x,y)$ *и* $\nu(x,y)$ *параллельны, т. е. справедлива пропорция*[3]

$$\varphi'_x(x,y) : \varphi'_y(x,y) = M(x,y) : N(x,y). \tag{7}$$

► Кривая Γ (см. рис. 1), задаваемая уравнением (6), касается поля направлений l уравнения (3) тогда и только тогда, когда в каждой точке $(x,y) \in \Gamma$ касательная к Γ совпадает с прямой $l(x,y)$ или когда их нормали $\nabla\varphi(x,y)$ и $\nu(x,y)$ параллельны. ■

[1] Локально (вблизи любой точки $(x,y) \in \Gamma$) оно может быть получено, например, исключением параметра t из системы $x = \mathsf{x}(t)$, $y = \mathsf{y}(t)$.

[2] Возможно, не связная — и тогда речь идет о любой ее *компоненте связности.*

[3] Заметим, что в этой пропорции допустимы и нулевые члены.

III. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Если уравнение (3) удовлетворяет, например, дополнительному условию[1]

$$N(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in G,$$

то с помощью операций деления[2] оно преобразуется к виду (5), где $f \equiv -M/N$.

• С одной точки зрения, уравнение (5) по-прежнему остается уравнением в дифференциалах, но теперь уже вида

$$f(x, y)\,dx - dy = 0,$$

и задает поле направлений, которое каждой точке $(x, y) \in G$ ставит в соответствие заведомо *невертикальную* (т. е. не параллельную оси ординат) прямую с *угловым коэффициентом*[3], равным $dy/dx = f(x, y)$. Это поле задает свои интегральные кривые.

• С другой точки зрения, левую часть уравнения (5) можно воспринимать и как самую настоящую производную[4] y' искомого решения — и тогда уравнение (5) превращается в *обыкновенное дифференциальное* уравнение *1-го порядка*, *разрешенное* относительно производной.

Его решениями, по определению, служат всякие функции $\mathsf{y}\colon I \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$\mathsf{y}'(x) = f(x, \mathsf{y}(x)), \quad x \in I. \tag{8}$$

Это уравнение также задает поле направлений, ставя в соответствие каждой точке $(x, y) \in G$ касательную к проходящему через нее графику Γ_{y} решения y, причем угловой коэффициент $\mathsf{y}'(x)$ этой касательной, согласно равенству (8), совпадает с тем же числом $f(x, y)$.

Итак, рассмотренные два взгляда на уравнение (5) приводят к одинаковым полям направлений и различаются лишь способом задания интегральных кривых, что фактически и подтверждает

[1]Случай $M(x, y) \neq 0$ рассматривается аналогично.

[2]Если $dx = 0$, то, в силу уравнения (3), также и $dy = 0$, однако точку $(dx, dy) = (0, 0)$ можно смело считать удовлетворяющей уравнению (5) (воспринимаемому как пропорция; впрочем, потеря этой точки была бы здесь не существенной).

[3]Совпадающим, по определению, с тангенсом ориентированного (против часовой стрелки) угла наклона к положительному направлению оси абсцисс.

[4]Хотя, по своему происхождению, она представляет собой просто дробь.

Лемма 2. *Если* $f \in \mathrm{C}(G)$, *то кривая* Γ (6) *является интегральной для уравнения в дифференциалах* (5) *тогда и только тогда, когда она служит графиком* Γ_{y} *некоторого решения* y *дифференциального уравнения* (5).

► В силу вышеизложенного остается только доказать, что способы задания интегральных кривых при рассмотренных выше двух точках зрения на уравнение (5) эквивалентны.

1. Пусть кривая Γ (6) — интегральная для уравнения (5) в дифференциалах. Тогда она служит графиком некоторой функции y. Действительно:

- в силу пропорции

$$\varphi'_x(x, y) : \varphi'_y(x, y) = f(x, y) : (-1), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

имеем

$$\varphi'_y(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \Gamma;$$

- следовательно, по теореме о неявной функции уравнение

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{9}$$

в достаточно малой окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ задает функцию $y = \mathsf{y}(x)$, т. е. кривая Γ *локально* (вблизи каждой своей точки) служит графиком такой функции;

- но тогда и вся кривая Γ *в целом* обязательно служит графиком некоторой функции y, однозначно[1] определенной на полной проекции кривой на ось абсцисс.

2. Обратно, если функция $\mathsf{y}\colon I \to \mathbb{R}$ — решение дифференциального уравнения (5), то ее график Γ_{y} задается уравнением[2]

$$\varphi(x, y) \equiv y - \mathsf{y}(x) = 0 \quad (\nabla\varphi = (-\mathsf{y}', 1) \neq 0),$$

т. е. записывается в форме (6). ■

---

[1]Действительно (рис. 2), если бы какие-то две точки кривой Γ имели одинаковую абсциссу x_0, то на дуге кривой Γ, соединяющей эти две точки, нашлась бы внутренняя точка (x_1, y_1) с наименьшей или наибольшей абсциссой $x_1 \neq x_0$ (например, самая левая на рис. 2), а тогда уравнение (9) не задавало бы функцию $y = \mathsf{y}(x)$ ни в какой полной окрестности точки x_1 ввиду отсутствия точек дуги с одной стороны от нее.

[2]В качестве области определения G' функции φ можно взять ту компоненту связности открытого множества $G \cap (I \times \mathbb{R})$, которая содержит график Γ_{y}, а требование $\varphi \in \mathrm{C}^1(G')$ выполнено, так как функция y' (8) непрерывна.

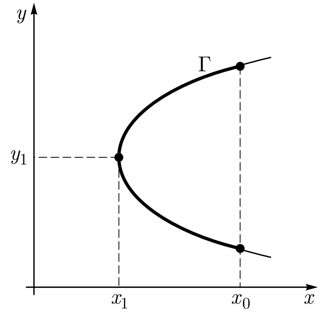


Рис. 2. Интегральная кривая — график функции?

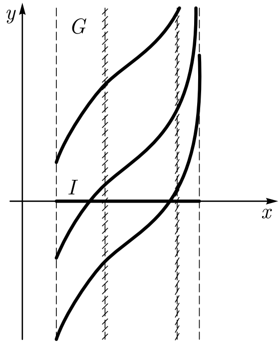


Рис. 3. Поле направлений уравнения первообразной

IV. Уравнение первообразной. Рассмотрим простейший частный случай уравнения (5)

$$y' = f(x), \quad f\colon I \to \mathbb{R}, \tag{10}$$

решениями которого служат всевозможные *первообразные* функции f и только они.

Правая часть этого уравнения, заданного в вертикальной полосе $G = I \times \mathbb{R}$ (рис. 3), не зависит от y, поэтому его поле направлений во всех точках любой вертикальной прямой принимает одно и то же значение. Коль скоро поле направлений *инвариантно относительно вертикальных сдвигов*, такой же инвариантностью обладает и множество всех интегральных кривых этого уравнения.

В курсе математического анализа доказана

Теорема 3. *Если $f \in C(I)$, то при любом фиксированном значении $x_0 \in I$ общее решение уравнения* (10) *задается формулой*

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + C. \tag{11}$$

При каждом значении C для любого интервала[1] $J \subset I$ формула (11) указывает явную зависимость переменной y от пере-

[1] Не обязательно содержащего точку x_0.

менной $x \in J$, определяющую решение уравнения (10), причем никаких других решений это уравнение не имеет.

Таким образом, любая интегральная кривая уравнения (10) совпадает с графиком функции (11), где $x \in I$, или с его частью.

1.2. Общее решение

уравнения в дифференциалах ищется в виде линий уровня его интеграла.

I. Интеграл уравнения в дифференциалах. Ключевую роль в решении уравнения (3) призвана сыграть скалярная функция, принимающая *постоянное значение* вдоль каждой его интегральной кривой (а не только вдоль одной, как в формуле (6)).

Определение 1.3. Функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$ с ненулевым градиентом называется *интегралом*[1] *уравнения* (3), если в каждой точке $(x, y) \in G$ она удовлетворяет условию (7).

Любой интеграл φ уравнения (3) обладает следующими свойствами:

- при каждом фиксированном значении $C \in E(\varphi)$ любая компонента связности[2] множества $\varphi^{-1}(C)$ точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x, y) = C, \tag{12}$$

есть именно кривая — так называемая *линия уровня* функции φ;

- любая линия уровня функции φ, согласно лемме 1, является *интегральной кривой* уравнения (3);
- если две линии уровня функции φ соответствуют разным значениям C, то они не имеют общих (и даже общих предельных) точек в области G;
- через любую точку $(x_0, y_0) \in G$ *проходит ровно одна* линия уровня функции φ — а именно, та, которая соответствует значению $C = \varphi(x_0, y_0)$.

II. Формула общего решения. Из теоремы 3 вытекает, что интегралом уравнения первообразной (10), эквивалентного уравнению в дифференциалах

[1] Ср. с *первым интегралом* автономной системы (см. п. 7.5).

[2] Которых, вообще говоря, несколько, причем разные компоненты связности, по определению, не имеют в G общих предельных точек.

$$dy = f(x)\,dx, \quad (x, y) \in G \equiv I \times \mathbb{R},$$

служит, например, функция

$$\varphi(x, y) = y - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi, \tag{13}$$

а интегральными кривыми этого уравнения служат линии уровня этого интеграла (или их части) и только они.

Оказывается, последним свойством обладают все интегралы любого уравнения в дифференциалах. Именно это и утверждает

Теорема 4. *Если* φ *— интеграл уравнения* (3), *то его общее решение задается уравнением* (12).

► Исходя из свойств интеграла φ, для доказательства теоремы остается лишь установить, что любая интегральная кривая Γ уравнения (3) совпадает с какой-либо линией уровня функции φ или с ее частью. В самом деле:

• уравнение (3), в силу условия (7), переписывается в виде

$$\varphi'_x(x, y)\,dx + \varphi'_y(x, y)\,dy = 0, \quad (x, y) \in G;$$

• пусть $(x_0, y_0) \in \Gamma$, тогда без ограничения общности можно считать выполненным, скажем, условие[1]

$$\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

а в силу непрерывности функции φ'_y для достаточно малой окрестности U точки (x_0, y_0) получаем неравенство

$$\varphi'_y(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in U;$$

• согласно лемме 2, уравнение (3) в окрестности U записывается в виде

$$y' = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}, \quad (x, y) \in U, \tag{14}$$

и дуга $\Gamma(x_0, y_0)$ интегральной кривой Γ, расположенная в окрестности U, служит графиком Γ_{y} некоторого решения $y = \mathsf{y}(x)$;

• но тогда дуга $\Gamma(x_0, y_0)$ лежит на линии уровня функции φ, т. е. для некоторой константы C имеем

$$\varphi|_{\Gamma_{\mathsf{y}}} = C,$$

[1] Случай $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично.

так как с учетом уравнения (14) получаем

$$\frac{d}{dx}\varphi(x,\mathsf{y}(x)) = \varphi'_x(x,\mathsf{y}(x)) +$$

$$+\,\varphi'_y(x,\mathsf{y}(x))\mathsf{y}'(x) = 0, \quad x \in D(\mathsf{y});$$

• наконец, из того факта, что кривая Γ локально (вблизи каждой своей точки) совпадает с какой-либо линией уровня функции φ, следует, что она и в целом содержится в некоторой линии уровня[1]. ■

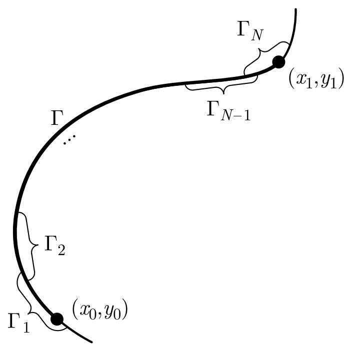


Рис. 4. Вся интегральная кривая

III. Уравнение в полных дифференциалах. Важнейший частный случай уравнения в дифференциалах и его интеграла описывает

Определение 1.4. Уравнение (3) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует его *потенциал*, т. е. функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$, удовлетворяющая равенству

$$\nabla\varphi(x,y) = (M(x,y), N(x,y)), \quad (x,y) \in G.$$

Например, уравнение первообразной (10) является уравнением в полных дифференциалах, так как его интеграл (13) служит одновременно и его потенциалом. Заметим, что:

• всякий потенциал уравнения (3) является его интегралом, поскольку равенство в определении 1.4 влечет за собой пропорцию (7);

• по большому счету, верно и обратное, т. е. всякий интеграл φ уравнения (3) служит потенциалом другого уравнения, получаемого из исходного уравнения (3) домножением обоих его коэффициентов M и N на некоторый положительный *множитель*[2] $\mu\colon G \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий равенству

---

[1]Действительно (рис. 4), любая замкнутая дуга кривой Γ с концами (x_0, y_0) и (x_1, y_1) локально вблизи каждой своей точки принадлежит какой-либо линии уровня, поэтому, в силу компактности этой дуги (по лемме Гейне — Бореля), покрывается конечной цепочкой открытых дужек $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ некоторых линий уровня функции φ, последовательно цепляющихся друг за друга, а значит, лежащих на одной линии уровня.

[2]Называемый, по понятным причинам, *интегрирующим* (см. также раздел III из п. 8.1 и раздел III из п. 8.3).

$$\nabla\varphi(x,y) = \mu(x,y)\cdot(M(x,y),N(x,y)), \quad (x,y)\in G;$$

• уравнение в полных дифференциалах с известным потенциалом решается в соответствии с теоремой 4;

• левая часть уравнения в полных дифференциалах попросту совпадает с полным дифференциалом его потенциала

$$d\varphi(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy;$$

• для того чтобы уравнение в дифференциалах (3) с коэффициентами $M, N \in \mathrm{C}^1(G)$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо[1] выполнение равенства

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y), \quad (x,y)\in G, \tag{15}$$

поскольку

$$M, N \in \mathrm{C}^1(G) \implies \varphi'_x, \varphi'_y \in \mathrm{C}^1(G) \implies \varphi \in \mathrm{C}^2(G) \implies$$
$$\implies M'_y(x,y) = \varphi''_{xy}(x,y) = \varphi''_{yx}(x,y) = N'_x(x,y), \quad (x,y)\in G.$$

IV*. Случай ветвления потенциала. Уравнение

$$\frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0, \quad (x,y)\in G \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

является уравнением в полных дифференциалах с потенциалом φ, значение которого в точке (x,y) определяется как ориентированный угол, образуемый радиус-вектором (x,y), например, с положительным направлением оси абсцисс.

Действительно, левая часть уравнения в правой, верхней, левой и нижней координатных полуплоскостях может быть представлена, соответственно, в виде

$$d\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad d\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}, \quad d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi\right), \quad d\left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\pi\right).$$

И несмотря на то, что единой непрерывной ветви этого потенциала во всей плоскости с выколотой точкой[2] $(0,0)$ не существует, любые два потенциала данного уравнения локально вблизи

---

[1] А в случае *односвязной* области G — и достаточно, что доказано в курсе математического анализа. Более того, зачастую равенство (15) сразу принимают за определение уравнения в полных дифференциалах.

[2] Из-за чего плоскость перестает быть односвязной.

любой точки проколотой плоскости отличаются друг от друга на константу (аддитивную).

Поэтому множества линий уровня всех этих потенциалов по существу одинаковы — они состоят из всех лучей, начинающихся в выколотой точке. А значит, общее решение этого уравнения все равно задается уравнением (12).

1.3. Автономное уравнение

имеет вид

$$y' = f(y), \quad f\colon I \to \mathbb{R}, \tag{16}$$

и задано в горизонтальной полосе $G \equiv \mathbb{R} \times I$.

I. Общее решение при отсутствии особых точек. Уравнение (16) эквивалентно уравнению в дифференциалах

$$dy = f(y)\,dx.$$

Его поле направлений не зависит от x, а значит, *инвариантно относительно горизонтальных сдвигов*, как и множество его интегральных кривых (рис. 5).

Пусть на некотором интервале $J \subset I$ нет *особых* точек[1], т. е. точек, в которых функция f обнуляется. Тогда уравнение (16) приводится к уравнению в полных дифференциалах

$$dx = \frac{1}{f(y)}\,dy, \quad (x, y) \in G' \equiv \mathbb{R} \times J,$$

и, в случае $f \in \mathrm{C}(J)$, имеет потенциал

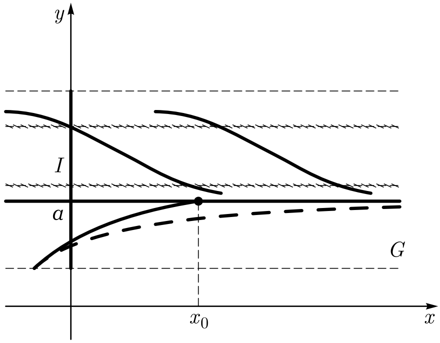
$$\varphi(x, y) \equiv x - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} \quad (y_0 \in J),$$

задающий в области G' общее решение

$$x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} + C. \tag{17}$$

[1]Векторного поля f.

Рис. 5. Поле направлений автономного уравнения



Заметим, что формула (17) действительно задает неявно функцию $y = \mathsf{y}(x)$, поскольку на интервале J непрерывная функция f не обнуляется, а значит, имеет на нем фиксированный знак, следовательно, задаваемая формулой (17) функция $x = \mathsf{x}(y)$ монотонна и потому обратима.

II. Единственность при наличии особой точки. Пусть некоторая точка $a \in I$ является особой, т. е. удовлетворяет равенству

$$f(a) = 0.$$

Тогда прямая $y = a$ заведомо служит интегральной кривой уравнения (16).

Определение 1.5. Точка $(x_0, y_0) \in G$ для уравнения (3) называется:

- *точкой существования*, если через нее проходит хотя бы одна его интегральная кривая;
- *точкой единственности*, если любые две его интегральные кривые, проходящие через точку (x_0, y_0), *локально* (вблизи (x_0, y_0)) совпадают.

Если уравнение (3) имеет интеграл, то, в силу теоремы 4, все точки области G — точки существования и единственности.

В рассматриваемом же здесь случае все точки прямой $y = a$ являются точками существования, а на вопрос, будут ли они еще и точками единственности, дает ответ

Лемма 5. *Если* $f \in \mathrm{C}(I)$, *то для уравнения* (16) *любая точка* $(x, y) \in G$ *— точка существования, причем:*

- *если* y *— неособая точка, то* (x, y) *— точка единственности;*

• *если $y = a$ — изолированная особая точка, то (x, y) — точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла*[1]

$$\int^{a\pm 0} \frac{d\eta}{f(\eta)}. \tag{18}$$

► В силу вышесказанного для доказательства теоремы остается лишь установить справедливость ее заключительного утверждения. Пусть a — изолированная особая точка, для которой выполнено, скажем, неравенство[2]

$$f(y) > 0, \quad y_0 \le y < a. \tag{19}$$

Изучим поведение интегральных кривых вблизи произвольной точки (x_0, a) при $y \to a - 0$.

1. Пусть несобственный интеграл конечен (см. сплошную интегральную кривую на рис. 5)

$$\int_{y_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = x_1. \tag{20}$$

• Для некоторой функции x, задаваемой формулой (17), имеем

$$\mathsf{x}(a-0) = \lim_{y \to a-0} \mathsf{x}(y) = \int_{y_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} + C_1 = x_1 + C_1 = x_0,$$

как только $C_1 \equiv x_0 - x_1$. А тогда для обратной функции y получаем $\mathsf{y}(x) \to a - 0$ при $x \to x_0 - 0$. Поэтому через точку (x_0, a) проходит составная интегральная кривая, которая слева от этой точки совпадает с графиком возрастающей функции y, а справа идет по прямой $y = a$.

• Интегральная кривая, доопределенная по непрерывности в точку (x_0, a), имеет в ней горизонтальную касательную (т. е. касается поля направлений): действительно, левосторонняя про-

[1] Нижний предел интегрирования не указан, поскольку его значение, с точки зрения сходимости интеграла, здесь не существенно (важно лишь, с какой стороны от верхнего предела происходит интегрирование).

[2] Другие случаи исследуются аналогично.

изводная полученной функции у в точке x_0 равна следующему пределу[1]

$$\lim_{x\to x_0-0} \mathsf{y}'(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(\mathsf{y}(x)) = \lim_{y\to a-0} f(y) = f(a) = 0,$$

равному, как видим, нулю, а правосторонняя производная также равна нулю, как производная от константы.

2. Пусть интеграл (20) бесконечен (см. штриховую часть интегральной кривой на рис. 5). Тогда абсолютно все интегральные кривые, идущие снизу от прямой $y = a$, приближаются к ней лишь асимптотически при $x \to \infty$, не имея с ней общих предельных точек. Поэтому в точке (x_0, a), точнее с нижней стороны от нее, единственность не нарушается. ■

III. Дифференциальный признак единственности. Одним из простейших, но, как оказывается[2], перспективных способов обеспечения локальной единственности решений уравнения (16) является предположение самой обыкновенной *дифференцируемости* его правой части в особых точках, как показывает

Следствие 6. *Если $f \in \mathrm{C}(I)$ и в изолированной особой точке $a \in I$ существует производная $f'(a)$, то для уравнения* (16) *все точки прямой $y = a$ — точки единственности.*

► При указанных в этом следствии условиях интегралы (18) расходятся. Например[3], в случае (19) из равенства

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = f'(a)h + o(h), \quad h \to 0,$$

обозначив $L \equiv |f'(a)| + 1$, для некоторого $h_0 > 0$ получаем

$$0 < f(a-h) \le |f'(a)(-h)| + |o(-h)| \le Lh, \quad 0 < h < h_0,$$

откуда имеем

$$\int\limits_{a-h_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = \int\limits_0^{h_0} \frac{dh}{f(a-h)} \ge \int\limits_0^{h_0} \frac{dh}{Lh} = \infty,$$

и остается только воспользоваться теоремой 5. ■

[1] В силу факта его существования (теорема из курса математического анализа).

[2] См. теорему 9 далее.

[3] Остальные случаи рассматриваются аналогично.

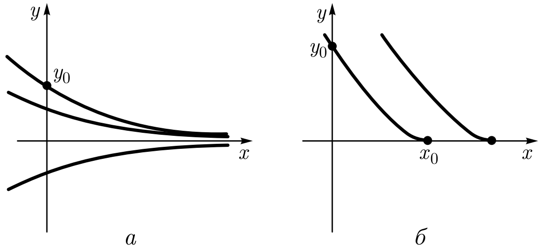


Рис. 6. Убывание решения к нулю:
а — экспоненциальное; *б* — квадратичное

IV. Характерные примеры. Для разных *эволюционных*[1] уравнений вопросы единственности решаются по-разному.

• Уравнение *остывания* тела

$$y' = -ky \quad (k > 0), \quad (x, y) \in G \equiv \mathbb{R}^2,$$

в окружающей среде, температура которой поддерживается равной нулю, задает температуру $y = \mathsf{y}(x)$ тела в момент x при начальном условии $\mathsf{y}(0) = y_0 > 0$ следующим равенством

$$-kx = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta} \equiv \ln\frac{y}{y_0} \iff y = y_0 e^{-kx}.$$

Здесь точки существования и единственности заполняют всю плоскость, так как интегралы (18) расходятся: это означает, что тело никогда не остынет до температуры окружающей среды (рис. 6, *а*).

• В уравнении *вытекания* жидкости

$$y' = -k\sqrt{y} \quad (k > 0), \quad (x, y) \in G \equiv \mathbb{R} \times [0; \infty),$$

исследуется, как функция от времени x, высота $y = \mathsf{y}(x)$ уровня жидкости, вытекающей из сосуда через отверстие в его дне. Это уравнение при условии $\mathsf{y}(0) = y_0 > 0$ имеет решение, определяемое формулой

[1]В которых (в частности, автономных) скорость изменения изучаемой величины есть функция от самой этой величины, а также, возможно, от ее производных по каким-то другим, не временны́м, переменным.

$$-kx = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} \equiv 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) \Longleftrightarrow y = \left(\sqrt{y_0} - \frac{kx}{2}\right)^2, \quad \frac{kx}{2} \leq \sqrt{y_0}.$$

Из нее видно, что вода полностью вытекает из сосуда за конечное время (интеграл (18) здесь сходится), поэтому точки интегральной кривой $y = 0$ не являются точками единственности: указанное решение, обратившись в нуль в тот момент x_0, когда $kx_0 = 2\sqrt{y_0}$, далее уже совпадает с нулевым (рис. 6, *б*).

1.4. Уравнение с разделяющимися переменными

имеет вид

$$P(x)Q(y)\,dx = R(x)S(y)\,dy, \qquad P, R\colon I \to \mathbb{R}, \quad Q, S\colon J \to \mathbb{R}, \tag{21}$$

и задано в любой области

$$G \subset \{(x, y) \in I \times J \mid (P(x)Q(y), R(x)S(y)) \neq (0, 0)\}, \tag{22}$$

а в случае обыкновенного дифференциального уравнения — записывается в виде

$$y' = f(x)g(y), \qquad f\colon I \to \mathbb{R}, \quad g\colon J \to \mathbb{R}.$$

I. Разделение переменных. Область G (22) по определению не содержит ни одной точки (x_0, y_0), удовлетворяющей сразу двум равенствам

$$R(x_0) = 0, \quad Q(y_0) = 0.$$

Тем не менее каждое значение x_0 или y_0, удовлетворяющее в отдельности первому или второму из этих равенств, порождает интегральную кривую $x = x_0$ или $y = y_0$.

Рассмотренные ранее уравнение первообразной (10) и автономное уравнение (16) служат примерами уравнения с разделяющимися переменными. А оно, в свою очередь, *разделением переменных* (см. доказательство теоремы 7 ниже) сводится к уравнению в полных дифференциалах.

Из теоремы 4 вытекает

Теорема 7. *Если* $P, R \in \mathrm{C}(I)$ *и* $Q, S \in \mathrm{C}(J)$, *а функции* Q, R *не имеют нулей, то для уравнения* (21) *в области* G (22):

• *при любой фиксированной точке* $(x_0, y_0) \in G$ *общее решение задается уравнением*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{P(\xi)}{R(\xi)}\, d\xi = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{S(\eta)}{Q(\eta)}\, d\eta + C; \tag{23}$$

• *все точки области* G *— точки существования и единственности.*

▶ Действительно, в области G уравнение с разделенными переменными

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0,$$

имеющее коэффициенты

$$M(x) = \frac{P(x)}{R(x)}, \quad N(y) = -\frac{S(y)}{Q(y)},$$

равносильно исходному (так как их поля направлений одинаковы) и является уравнением в полных дифференциалах с потенциалом

$$\varphi(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(\xi)\, d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} N(\eta)\, d\eta.$$

Поэтому к нему непосредственно применима теорема 4. ■

II. Однородное уравнение. Так называется уравнение, которое имеет вид

$$y' = f\,(y/x) \tag{24}$$

и задается в какой-либо из областей (секторов плоскости)

$$G = \{(x, y) \mid x > 0,\ y/x \in I\}$$

или

$$G = \{(x, y) \mid x < 0,\ y/x \in I\}\,.$$

Правая часть этого уравнения зависит только от отношения y/x, а потому его поле направлений во всех точках одного луча, выходящего из начала координат, принимает одно и то же значение, т. е. оно *инвариантно относительно гомотетий с центром* $(0, 0)$ (рис. 7, *а*). Этим же свойством обладает и множество интегральных кривых уравнения (24).

С помощью *замены переменной* y на

$$z \equiv y/x \tag{25}$$

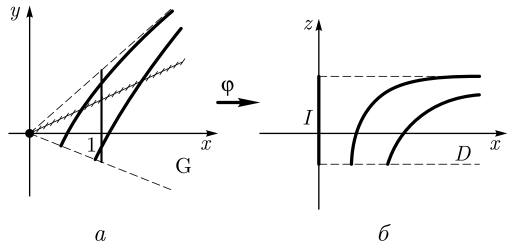


Рис. 7. Замена переменных в однородном уравнении:

а — сектор; *б* — полуполоса

(которая при подстановке $y = \mathsf{y}(x)$ и $z = \mathsf{z}(x)$ задает зависимость между функциями y и z) уравнение (24) *сводится* к уравнению с разделяющимися переменными в том смысле, какой подразумевает

Лемма 8. *При переходе от переменных x, y к переменным x, z, связанным соотношением* (25), *все решения уравнения* (24) *переходят в решения уравнения*

$$z' = \frac{g(z)}{x}, \qquad g(z) \equiv f(z) - z, \quad z \in I, \tag{26}$$

и наоборот.

► Действительно, замена (25) связывает старую функцию y и новую функцию z (с общей областью определения J) соотношением

$$\mathsf{y}(x) \equiv x\mathsf{z}(x), \quad x \in J,$$

поэтому верна цепочка эквивалентных утверждений

$$\mathsf{y}'(x) = f\left(\frac{\mathsf{y}(x)}{x}\right) \Longleftrightarrow \big(x\mathsf{z}(x)\big)' =$$

$$= f\left(\frac{x\mathsf{z}(x)}{x}\right) \Longleftrightarrow x\mathsf{z}'(x) = g(\mathsf{z}(x)),$$

первое и последнее из которых означают, что функции y и z являются решениями уравнений (24) и (26) соответственно. ■

III*. Геометрический смысл замены переменных. Соотношение (25) можно интерпретировать и как формулу, задающую отображение (рис. 7, *а*, *б*)

$$\varphi\colon G \to D \equiv \mathbb{R}^+ \times I\ (\mathbb{R}^- \times I),$$

которое каждой точке $(x, y) \in G$ ставит в соответствие точку

$$(x, z) = \varphi(x, y) \equiv (x, y/x) \in D.$$

При этом отображении каждая кривая сектора G переходит в кривую полуполосы D, а интегральная кривая уравнения (24) — в интегральную кривую уравнения (26), о чем и свидетельствует лемма 8.

Задачи для самостоятельного решения

1. Могут ли два разных уравнения вида (3) задавать одинаковые поля:

- нормалей,
- направлений?

2. Верно ли, что если функция $\varphi \in \mathrm{C}^1(G)$ с ненулевым градиентом постоянна вдоль каждой интегральной кривой уравнения (3), то она есть интеграл этого уравнения?

3. Задает ли формула

$$y = \int\limits_{C_1}^{x} f(\xi)\, d\xi + C_2$$

общее решение уравнения (10) первообразной? Каким недостатком обладает эта формула?

4. Докажите или опровергните следующее утверждение (аналогичное фактически установленному в процессе доказательства леммы 2): если поверхность $\Gamma \subset (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1)$ локально в окрестности каждой своей точки $(x_0, y_0) \in \Gamma$ служит графиком функции $y = \mathsf{y}(x)$, то она и в целом служит графиком некоторой такой функции.

5. Какое наибольшее количество не равных локально друг другу интегральных кривых можно провести через точку прямой $y = a$ в формулировке теоремы 5, если:

- сходится ровно один из двух интегралов (18);
- сходятся оба интеграла (18)?

6. Получите явную (выражающую решение через коэффициенты уравнения) формулу для общего решения уравнения (3) в полных дифференциалах в области $G = I \times J$ при выполнении условия (15).

7. Есть предположение, что *переживаемое* человеком время Δt вблизи настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное, а как его отношение ко всему времени $x(t)$, *прожитому* этим человеком к моменту t. Исходя из этого предположения составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

8. Может ли линия уровня (12) потенциала уравнения (3) в полных дифференциалах быть несвязной, т. е. представлять собой не одну, а объединение нескольких интегральных кривых? Может ли число таких кривых не быть одинаковым для всех C?

9. Докажите, что любые два потенциала уравнения (3) в полных дифференциалах локально вблизи любой точки области G отличаются друг от друга на константу (аддитивную).

10. Верно ли, что любая точка единственности какого-либо уравнения, по определению, есть и точка существования?

11. Для уравнения

$$y' = |y|^a \quad (\text{или} \quad y' = |y|^a \cdot \operatorname{sgn} y)$$

в зависимости от значения $a \in \mathbb{R}$ исследуйте на существование и единственность каждую точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (доопределив при $a \le 0$ по непрерывности обобщенное поле направлений в точки, где $y = 0$).

12. В зависимости от значений $\alpha, \beta > 0$ определите, сколько проходит через начало координат локально различных интегральных кривых уравнения (16) с правой частью:

- $f(y) = \begin{cases} y^\alpha, & y \ge 0, \\ (-y)^\beta, & y \le 0; \end{cases}$
- $f(y) = \begin{cases} y^\alpha, & y \ge 0, \\ -(-y)^\beta, & y \le 0. \end{cases}$

13. Докажите, что если если $P, R \in \mathrm{C}(I)$ и $Q, S \in \mathrm{C}(J)$, а функция R имеет изолированный нуль $\alpha \in I$, то для уравнения (21) в области (22) любой интервал прямой $x = \alpha$ — интегральная кривая, причем ее точка (α, β), удовлетворяющая условию

$$S(\beta) \ne 0, \tag{27}$$

есть точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла

$$\int^{\alpha \pm 0} \frac{P(\xi)}{R(\xi)}\, d\xi.$$

Существенно ли в этом утверждении условие (27)?

14. Докажите, что если $f \in \mathrm{C}(I)$ и функция g (26) обнуляется на интервале I ровно в одной точке $a \in I$, то для уравнения (24) любая точка $(x, y) \in G$ — точка существования, причем:

- если $y \ne ax$, то (x, y) — точка единственности;
- если $y = ax$, то (x, y) — точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла

$$\int^{a \pm 0} \frac{d\eta}{g(\eta)}.$$