

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|  |           |
|--|-----------|
| Условные обозначения . . . . .                         | 3         |
| Предисловие . . . . .                                  | 5         |
| <b>Глава 1. Предварительные сведения . . . . .</b>     | <b>7</b>  |
| 1.1. Операции с множествами . . . . .                  | 7         |
| 1.2. Классы множеств . . . . .                         | 10        |
| 1.3. Функции множеств . . . . .                        | 15        |
| 1.4. Измеримые функции . . . . .                       | 19        |
| 1.5. Интегрирование . . . . .                          | 25        |
| 1.6. Прямое произведение мер . . . . .                 | 33        |
| 1.7. Выпуклые функции . . . . .                        | 37        |
| 1.8. Вероятность . . . . .                             | 40        |
| 1.9. Нормальные распределения . . . . .                | 44        |
| <b>Глава 2. Свойства случайных процессов . . . . .</b> | <b>48</b> |
| 2.1. Понятие случайного процесса . . . . .             | 48        |
| 2.2. Сепарабельные процессы . . . . .                  | 56        |
| 2.3. Непрерывные случайные процессы . . . . .          | 63        |
| 2.4. Процессы без разрывов второго рода . . . . .      | 69        |
| 2.5. Фильтрация . . . . .                              | 77        |
| 2.6. Марковские моменты . . . . .                      | 79        |
| 2.7. Измеримые случайные процессы . . . . .            | 83        |
| 2.8. Момент первого попадания . . . . .                | 90        |
| 2.9. Предсказуемые процессы . . . . .                  | 94        |
| <b>Глава 3. Мартингалы . . . . .</b>                   | <b>96</b> |
| 3.1. Условные математические ожидания . . . . .        | 96        |
| 3.2. Общие сведения о мартингалах . . . . .            | 105       |
| 3.3. Равномерная интегрируемость . . . . .             | 112       |
| 3.4. Остановленные субмартингалы . . . . .             | 121       |
| 3.5. Неравенства для субмартингалов . . . . .          | 130       |
| 3.6. Тождества Вальда . . . . .                        | 138       |
| 3.7. Траектории субмартингалов . . . . .               | 142       |
| 3.8. Сходимость субмартингалов . . . . .               | 148       |
| 3.9. Замкнутые субмартингалы . . . . .                 | 157       |
| 3.10. Возрастающие случайные процессы . . . . .        | 161       |
| 3.11. Субмартингалы из класса Дуба . . . . .           | 166       |

|  |            |
|--|------------|
| 3.12. Квадратично интегрируемые мартингалы . . . . .           | 177        |
| 3.13. Квадратические вариации мартингалов . . . . .            | 181        |
| <b>Глава 4. Процессы с независимыми приращениями . . . . .</b> | <b>190</b> |
| 4.1. Независимые приращения . . . . .                          | 190        |
| 4.2. Неравенства . . . . .                                     | 195        |
| 4.3. Свойства траекторий . . . . .                             | 200        |
| 4.4. Критерий непрерывности . . . . .                          | 206        |
| 4.5. Однородные процессы . . . . .                             | 211        |
| 4.6. Процессы Леви . . . . .                                   | 214        |
| <b>Глава 5. Пуассоновский процесс . . . . .</b>                | <b>221</b> |
| 5.1. Модель пуассоновского процесса . . . . .                  | 221        |
| 5.2. Конечномерные распределения . . . . .                     | 225        |
| 5.3. Стандартный пуассоновский процесс . . . . .               | 227        |
| 5.4. Другая модель пуассоновского процесса . . . . .           | 230        |
| 5.5. Считающий пуассоновский процесс . . . . .                 | 235        |
| <b>Глава 6. Процесс броуновского движения . . . . .</b>        | <b>237</b> |
| 6.1. Функции Хаара . . . . .                                   | 238        |
| 6.2. Модель броуновского движения . . . . .                    | 241        |
| 6.3. Конечномерные распределения . . . . .                     | 245        |
| 6.4. Принцип отражения . . . . .                               | 246        |
| 6.5. Броуновские траектории . . . . .                          | 251        |
| 6.6. Многомерное броуновское движение . . . . .                | 259        |
| <b>Глава 7. Стохастический интеграл . . . . .</b>              | <b>262</b> |
| 7.1. Интегрирование простых процессов . . . . .                | 262        |
| 7.2. Интегрирование предсказуемых процессов . . . . .          | 269        |
| 7.3. Вычисление некоторых интегралов . . . . .                 | 282        |
| 7.4. Формула Ито . . . . .                                     | 291        |
| <b>Глава 8. Применения формулы Ито . . . . .</b>               | <b>298</b> |
| 8.1. Характеризация броуновского движения . . . . .            | 298        |
| 8.2. Характеризация пуассоновского процесса . . . . .          | 300        |
| 8.3. Экспоненциальные мартингалы . . . . .                     | 306        |
| 8.4. Стохастические дифференциальные уравнения . . . . .       | 310        |
| 8.5. Уравнение диффузии . . . . .                              | 318        |
| 8.6. Уравнение Ланжевена . . . . .                             | 321        |
| 8.7. Модель Блэка-Шоулса . . . . .                             | 326        |
| Список литературы . . . . .                                    | 329        |
| Предметный указатель . . . . .                                 | 332        |