ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. А. АФАНАСЬЕВ, А. А. ПОГОНИН, А. Г. СХИРТЛАДЗЕ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЙ

УЧЕБНИК

Допущено
Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Автоматизированные технологии и производства»

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 531.7(075.8)
ББК 30.10я73
А941

Р е ц е н з е н т ы:
зав. кафедрой «Технология машиностроения и ремонт горных машин»
Московского государственного горного университета,
д-р техн. наук, проф. *Я. М. Радкевич*;
генеральный директор ОАО «Завод «Электромашина» (г. Белгород),
д-р техн. наук, проф. *Н. А. Пелипенко*

Афанасьев А. А.
А941 Физические основы измерений : учебник для студ. высш. учеб. заведений / А. А. Афанасьев, А. А. Погонин, А. Г. Схиртладзе. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. – 240 с.
ISBN 978-5-7695-5999-0

Приведены элементы теорий подобия и размерностей. Отражены представления о классических измерительных системах, элементах современной физической картины мира, стабильности фундаментальных физических постоянных. Рассмотрены соотношение неопределенностей Гейзенберга, принцип дополнительности, принципы создания современной эталонной базы на основе стабильности объектов микромира, сущность физических явлений и эффектов и физические основы измерительных преобразователей в машиностроении.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 531.7(075.8)
ББК 30.10я73

ISBN 978-5-7695-5999-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Физические основы измерений» относится к циклу общепрофессиональных дисциплин, вводящих в круг образовательных дисциплин по стандартизации и сертификации, и является базовой для подготовки студентов специальности «Стандартизация и сертификация» к изучению специальных курсов.

Вместе с тем углубленное изучение физических основ как теоретической, так и прикладной метрологии может оказать неоценимую помощь при приобретении машиностроительных специальностей, особенно в настоящее время, когда существует проблема оценки производственных рисков, замены морально устаревшей материальной базы метрологического обеспечения производства и повышения точности измерений.

Цель изучения дисциплины «Физические основы измерений» — подготовка студентов к выполнению обязанностей инженера по стандартизации и сертификации в области организационно-управленческой, производственно-технологической, научно-исследовательской и проектной деятельности.

Задачи дисциплины «Физические основы измерений» подразумевают изучение закономерностей измерений, методов теорий подобия и размерностей, различных измерительных систем, элементов современной физической картины мира, проблем физико-технического обеспечения инженерных решений процедур измерений, физических принципов создания современной эталонной базы на основе различных физических явлений.

Наряду с использованием традиционных линейных и виброакустических измерений, являющихся основой метрологической практики и методологии в машиностроении, современная прикладная метрология применяет методы хронометрических и фазохронометрических измерений, которые обладают практически неисчерпаемыми ресурсами точности. Наивысшая точность современных методов и средств измерений физических величин основывается на достижениях квантовой физики, в частности квантовой метрологии. Повышение точности измерений происходило постепенно, по мере перехода от категорий макромира к характеристикам микромира, основными из которых являются частота и фаза колебаний его элементов (электронов, элементарных частиц и других образований).

Изучение отдельных разделов дисциплины «Физические основы измерений» основано на материале, излагаемом в курсах физики, высшей математики, химии.

Навыки и знания, приобретенные студентами при изучении дисциплины «Физические основы измерений», способствуют усвоению материала при изучении дисциплин «Общая теория измерений», «Методы и средства измерений, испытаний и контроля», «Автоматизация измерений, контроля и испытаний».

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ МЕТОДОВ ТЕОРИЙ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

1.1. О методах теории подобия и системах единиц физических величин

В истории развития естествознания известны различные виды подобия: геометрическое, физическое, математическое, химическое, биологическое, психофизиологическое, кинематическое, динамическое и др. В теории и практике измерений физических величин непреходящее значение имеет подобие явлений, процессов, состава и свойств. Достаточно отметить значение анализа физического подобия для возникновения метода планирования эксперимента и проведения сложных научных исследований в авиастроении, гидро-, термо- и электродинамике, ядерной энергетике, космонавтике.

Современные представления о физическом подобии базируются на принципе независимости закономерностей явлений и процессов от конкретной системы измерительных мер. На достаточно коротком отрезке времени развития истории науки и техники использовались единицы (меры) физических величин, входящих в такие системы мер, как СГС (основные единицы: сантиметр, грамм, секунда), МКГСС (основные единицы: метр, килограмм-сила, секунда), МТС (основные единицы: метр, тонна, секунда), МКСА (основные единицы: метр, килограмм, секунда, ампер). С 1960 г. действует единая Международная система единиц физических величин — СИ, в которой основными единицами физических величин являются метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина, моль и кандела.

Модель явления, процесса, свойств представляет собой в той или иной степени схематизацию реальной картины. В первую очередь принимаются во внимание существенные черты, признаки моделируемого объекта. Второстепенные признаки, подробности, оттенки объекта, как правило, опускаются (учесть все многообразие качественных и количественных сторон объекта даже при использовании современных быстродействующих электронно-вычислительных машин (ЭВМ) практически не представляется возможным). Вследствие этого объект количественного анализа (в том числе измерения) — не реальное явление, процесс, свойство, а результат более или менее высокого уровня схематизации.

Физико-математическая модель физического процесса представляет собой математическое описание его динамических параметров и свойств среды во взаимной связи. Математическое описание может быть представлено в виде таблицы количественных показателей свойств среды, зависящих от ее динамических параметров, или в виде системы уравнений, связывающих зависимые и независимые переменные. Единицы физических величин являются масштабами этих величин и воспроизводятся природными или искусственными эталонами.

Между физическими величинами существуют зависимости (связи), которые выражаются математическими соотношениями, формулами или уравнениями. Эти зависимости не являются случайными, частными, но отражают широкий круг явлений и процессов. В данном случае говорят, что зависимости или закономерности имеют общий характер.

Совокупность физических величин, связанных между собой зависимостями, называют *системой величин*. Физические величины, входящие в систему и условно принятые в качестве независимых от других величин системы, называют *основными величинами* системы. В построении системы физических величин основные величины являются первичными в отличие от производных величин, которые следует назвать вторичными. Выбор основных величин является произвольным. При построении различных систем были выбраны следующие величины: длина, масса, время, сила, сила электрического тока, термодинамическая температура, количество вещества, сила света. Каждой основной величине присваивается символ в виде буквы латинского или греческого алфавита. Этот символ называется *обобщенной размерностью основной физической величины*. Для основных физических величин установлены следующие размерности: длина L, масса M, время T, сила тока I, термодинамическая температура Θ, количество вещества N, сила света J.

Системы физических величин строятся на совокупности нескольких основных величин и обозначаются совокупностью их символов, которые показывают размерность выбранной системы. Система величин *механики*, основанная на таких физических величинах, как длина, масса, время, имеет обозначение (размерность) LMT, основанная на таких физических величинах, как длина, сила, время, обозначается *LFT*. Объединенная система величин *механики и электричества LMTI* включает в себя такие основные физические величины, как длина, масса, время и сила тока. В качестве физической величины электричества могут быть использованы кроме силы тока электрический заряд, электрическое сопротивление, количество электричества и др. В данном случае наиболее удобной для использования оказалась сила тока. Система величин *механики* и *теплотехники* основывается на четырех основных физических величинах — длине, массе, времени, термодинамической температуре — и обозначается $LMT\Theta$.

Таким образом, систему физических величин составляет произвольно выбранная совокупность основных величин, с использованием которых образуют другие необходимые для описания физических процессов величины, называемые производными. Для основных физических величин принимают меру (масштабный фактор) для оценки числового значения этой величины, которую называют *единицей измерения физической величины*. Единицы измерения производных величин получают на основе их зависимостей от основных величин в виде уравнений связи.

Различают уравнения связи между физическими величинами вообще без учета единицы измерения и уравнения связи между их числовыми значениями. Уравнения связи между числовыми значениями величин могут иметь различный вид из-за выбора той или иной единицы измерения. В таких уравнениях нередко появляются коэффициенты пропорциональности, значения которых могут быть связаны с единицами измерений.

Сказанное можно пояснить следующим примером. Уравнение связи между длиной и площадью устанавливается из подобия фигур. Площади подобных фигур пропорциональны квадратам значений их сходственных линий. Площадь кругов, в частности, пропорциональна квадрату радиусов или диаметров. При соотнесении площадей подобных фигур имеют в виду уравнение связи величин: $S_1/S_2 = L_1^2/L_2^2$. Из этого выражения следует, что $S_1/L_1^2 = S_2/L_2^2$, т.е. отношение значения площади фигуры S к квадрату ее линейного размера L является постоянной величиной. Обозначив ее буквой k, получим общее выражение для определения площади геометрической фигуры: $S = kL^2$, где k — коэффициент, зависящий от формы измеряемой фигуры и принятой единицы измерения. Линейный размер и площадь являются физическими величинами: линейный размер (длина, радиус, диаметр и др.) — основная физическая величина в системе *LMT*, площадь — производная. Единицу измерения площади можно определить на основе единицы измерения линейного размера. В СИ единицей измерения линейной величины (размера) принят метр. Поэтому производная единица измерения площади будет квадратный метр, умноженный на коэффициент пропорциональности k. Для квадрата, прямоугольника при использовании в качестве единицы измерения площади квадратного метра $k = 1$, для круга $k = \pi/4$. Но в качестве единицы измерения площади принципиально мог бы быть принят круглый метр. В этом случае формулы для определения площадей геометрических фигур изменили бы свой вид, так как 1 м^2 равен $4/\pi$ круглого метра. Например, площади некоторых геометрических фигур определялись бы по формулам:

для равностороннего треугольника $S_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} L^2$;

для правильного шестиугольника $S_{кр} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} L^2$.

1.2. Определение размерностей

Возникновение и использование различных систем физических величин ставят задачу перевода одних единиц этих величин в другие. Система физических величин включает в себя также другие физические величины, определяемые через основные (первичные) с помощью формул или математических соотношений, — производные. Число основных величин может быть любым. Однако опыт проведения научно-исследовательских и вычислительных работ показал, что такое число целесообразно принимать вполне определенным для выбранной системы. Например, в число основных величин механической системы лучше всего включать три величины, в систему тепловых основных величин — четыре, в систему основных величин молекулярной физики — пять, в систему основных величин для всех разделов физики — семь величин.

Изменение каждой из основных физических величин или ее единицы влечет за собой изменение производной физической величины или соответственно ее единицы. Исследованием соотношений таких изменений занимался французский физик и математик Ж. Фурье (1768—1830). В своей монографии «Аналитическая теория тепла», вышедшей в 1822 г., он ввел термин «размерность». По определению Ж. Фурье, если основная величина изменяется в n раз, а производная в n^p раз, то эта производная величина обладает размерностью p по отношению к соответствующей основной величине. Именно Ж. Фурье впервые установил, что существуют определенные основные единицы измерения, относительно которых каждая физическая величина имеет определенные размерности, которые нужно записывать как показатели степеней основных единиц измерения.

В системах единиц физических величин СИ (основные семь единиц) и СГС (основные три единицы) единицы длины, массы и времени являются основными. Поэтому если производная величина X изменяется пропорционально L^p (длине в степени p), пропорционально M^q (массе в степени q), пропорционально T^r (времени в степени r), то величина X обладает размерностью p относительно длины (единицы длины), размерностью q относительно массы (единицы массы), размерностью r относительно времени (единицы времени). С использованием символов это запишется в виде

$$[X] = \dim X = L^p M^q T^r,$$

где квадратные скобки, в которые заключен символ величины X, обозначают размерность единицы производной величины X относительно единиц длины, массы, времени.

Символы L, M и T представляют собой обобщенные величины (или обобщенные единицы величин). Наряду с применением квадратных скобок для обозначения размерности применяют обозначение $\dim X$ (англ. *dimension* — размер, размерность).

Анализ размерностей широко использовался и используется в разных областях науки. Идеи, лежащие в основе анализа размерностей, достаточно просты и базируются на физических законах (связях между физическими величинами), не зависят от выбранной системы основных единиц измерения. Из этой идеи на основе логических рассуждений и применения простого математического аппарата следует важное следствие: функции, выражающие физические закономерности, должны обладать некоторым фундаментальным свойством, которое в математике называется *обобщенной однородностью* или *симметрией*. Это свойство позволяет записать искомые закономерности в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем *единиц измерения*, с меньшим числом аргументов (уже безразмерных) и тем самым упростить нахождение закономерностей.

1.3. Размерности производных физических величин

Производные величины, как было указано ранее, можно выразить через основные. Для этого следует ввести два понятия: размерность производной величины и определяющее уравнение.

Размерностью производной физической величины называют выражение ее через основные величины, в котором коэффициент пропорциональности принят равным единице.

Определяющим уравнением производной величины называют формулу (математическую зависимость), с помощью которой физическая величина может быть выражена в явном виде через другие величины системы.

Например, для скорости движения материального объекта определяющим уравнением является зависимость $v = s/t$, где s — длина пути, пройденного объектом при равномерном движении за время t. Чтобы найти размерность скорости, следует подставить в формулу вместо длины пути s и времени t их размерности (символы):

$$\dim v = L/T = LT^{-1}.$$

Определяющими уравнениями площади и объема являются соответственно следующие формулы:

$$S = a^2;\ V = b^3,$$

где a — длина стороны квадрата; b — длина ребра куба.

Если подставить вместо a и b размерность L, то определятся размерности площади и объема:

Таблица 1.1

Определяющие уравнения для некоторых физических величин

Физическая величина	Определяющее уравнение	Размерность величины
Площадь	$S = a^2$	L^2
Объем	$V = b^3$	L^3
Скорость	$v = s/t$	LT^{-1}
Момент инерции	$J = mr^2$	L^2M
Плотность	$\rho = m/V$	$L^{-3}M$
Удельный объем	$v = V/m$	L^3M^{-1}
Ускорение	$a = \Delta v/\Delta t$	LT^{-2}
Импульс тела	$P = mv$	LMT^{-1}
Момент импульса	$L = mvr$	L^2MT^{-1}
Сила	$F = ma$	LMT^{-2}
Момент силы	$M = Fr$	L^2MT^{-2}
Давление	$p = F/S$	$L^{-1}MT^{-2}$
Работа, энергия	$A = Fs$	L^2MT^{-2}
Мощность	$N = A/t$	L^2MT^{-3}

$$\dim S = L^2; \dim V = L^3.$$

Определяющие уравнения для ряда физических величин и размерность величин представлены в табл. 1.1.

Из табл. 1.1 следует, что размерность любой физической величины X в различных системах будет определятся по формулам:

в системе величин механики и электричества $LMTI$

$$\dim X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta};$$

в электростатической системе LMT

$$\dim X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma};$$

в электромагнитной системе LMT

$$\dim X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma};$$

в системе механики и теплотехники $LMT\Theta$

$$\dim X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \Theta^{\varepsilon};$$

в любой системе с числом основных величин больше трех

$$\dim X = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \ldots,$$

где α, β, γ, ε — целые числа.

Из приведенных формул следует, что размерность величины представляет собой произведение размерностей основных величин, возведенных в соответствующие степени.

Показатель степени (α, β, γ, δ, ε...), в которую возведена размерность основной величины, называется *показателем размерности физической величины* (как правило, является целым числом). Исключение составляют показатели степени в электростатической и электромагнитной системах, в которых они могут быть дробными.

1.4. Размерные и безразмерные величины

Величины, числовое значение которых зависит от принятых масштабов, т. е. от системы единиц измерения, называются *размерными* или *именованными* величинами. Величины, числовое значение которых не зависит от применяемой системы единиц измерения, называются *безразмерными* или *отвлеченными* величинами. Размерные величины — это, например, длина, время, сила, энергия, момент силы, давление и др. Отношение двух длин, отношение квадрата длины к площади, отношение энергии к моменту силы, значения тригонометрических функций и другие представляют собой примеры безразмерных величин. В формуле размерности некоторые показатели могут оказаться равными нулю. Например, размерность скорости $\dim v = LT^{-1} = LM^0T^{-1}$. Здесь показатель размерности β для массы равен нулю. Может оказаться, что все показатели размерности некоторой величины равны нулю. Именно такая величина называется безразмерной. Перечисленные ранее безразмерные величины можно дополнить такими величинами, как относительная деформация, относительная диэлектрическая проницаемость. Безразмерная величина в одной системе может оказаться размерной в другой. Например, абсолютная диэлектрическая проницаемость в электростатической системе LMT является безразмерной величиной, в электромагнитной системе LMT ее размерность равна $L^{-2}T^2$, а в системе величин механики и электричества $LMTI$ — $L^{-3}M^{-1}T^4I^2$. Из приведенного следует, что понятие размерности не является абсолютным. Его следует рассматривать как понятие относительное. Вследствие этого размерность представляет собой определенность только в рамках одной системы величин. Тем не менее размерность используют в качестве эффективного средства при анализе соотношений физических величин и в исследованиях.

Размерность позволяет определить, как изменяется размер производной величины при изменении размеров основных величин. Если размерность величины X равна $L^\alpha M^\beta T^\gamma$ и длина изменяется от L до L', масса от M до M' и время от T до T', то новый размер величины будет больше прежнего в $(L'/L)^\alpha(M'/M)^\beta(T'/T)^\gamma$ раз, т.е. $X'/X = (L'/L)^\alpha(M'/M)^\beta(T'/T)^\gamma$.

Пример 1.1. Определить изменение момента инерции системы при увеличении линейных размеров в 3 раза и массы в 2 раза.

Размерность момента инерции $\dim J = L^2M$. Пользуясь приведенной ранее формулой, получим

$$J'/J = (L'/L)^2(M'/M) = 3^2 \cdot 2 = 18.$$

Следовательно, момент инерции увеличится в 18 раз.

Пользуясь размерностями физических величин, можно определить изменение производной величины при изменении основных единиц величин, а также установить соотношение единиц величин в разных системах.

Пример 1.2. Выразить единицу работы — эрг СГС в джоулях СИ.

Можно записать

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2 = 10^{-3} \text{ кг} \cdot (10^{-2}\text{м})^2/\text{с}^2 = 10^{-3} \text{ кг} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2 =$$
$$= 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Размерность работы $\dim A = L^2MT^{-2}$.

Согласно приведенной ранее формуле для X'/X

$$X'/X = 1 \text{ Дж}/1 \text{ эрг} = (1 \text{ м}/1 \text{ см})^2 \cdot (1 \text{ кг}/1 \text{ г}) \cdot (1 \text{ с}/1 \text{ с})^{-2} =$$

$$= (100)^2 \cdot (1\,000) \cdot (1)^{-2} = 10^7.$$

Отсюда следует, что 1 эрг = 10^{-7} Дж.

Размерности физических величин позволяют обнаружить ошибки при решении задачи по определению физических величин. При получении расчетной формулы проверяют совпадение размерностей ее левой и правой частей. Несовпадение размерностей свидетельствует о том, что в ходе решения задачи была допущена ошибка. Следует вместе с тем отметить, что совпадение размерностей еще не означает правильности решения задачи.

1.5. Характеристика формулы размерности

Зависимость производных величин от основных физических величин (точно так же в отношении их единиц измерения) может быть представлена, как показано ранее, в виде формулы. Эта формула называется *формулой размерности*, и ее можно рассматривать как емкое определение и характеристику физической природы производной величины. Размерность нужно соотносить с определенной системой физических величин или системой единиц измерения физических величин. Такой вывод следует из того, что для одной и той же величины в разных системах единиц измерения формула размерности может содержать различное число сомножителей (аргументов) и иметь различный вид. В системе единиц величин, например, СГС (единицы измерения: сантиметр, грамм, секунда) формулы размерности всех физических величин имеют вид произведения степенных сомножителей: $\dim X = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$. Такой вид формулы размерности следует из физического условия: отношение двух численных значений любой производной величины не должно зависеть от выбранных масштабов для основных величин (или для единиц основных величин). Например, значение отношения двух площадей, измеренных в квадратных метрах, будет равно значению отношения этих же площадей, измеренных в квадратных дециметрах (сантиметрах, гектарах, километрах и т.д.). Данное утверждение можно легко доказать в общем виде.

Допустим, имеется производная размерная величина y, являющаяся функцией аргументов, в качестве которых могут выступать различные величины: механические, теплотехнические, световые и др. Для упрощения их можно рассматривать как геометрические. Тогда существующие связи между этой размерной величиной и длинами (расстояниями) в общем виде можно представить в виде уравнения

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторые линейные величины.

Обозначим через y' значение величины y, которое соответствует значениям аргументов $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Числовое значение y, а также y' зависит от единицы измерения длины, принятой для линейных величин (длин) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Изменим эту единицу измерения или масштаб длин в α раз. Числовые значения y, соответствующие этим линейным величинам, изменятся также в α раз. Согласно сформулированному ранее условию должно иметь место равенство соотношений

$$\frac{y'}{y} = \frac{f\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_n\right)}{f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \frac{f\left(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\right)}{f\left(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\right)}. \qquad (1.1)$$

Это означает, что значение y'/y должно быть одинаковым при любом значении единицы измерения или масштаба длин α. Из равенства (1.1) получаем

$$\frac{f\left(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha\right)}{f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)} = \frac{f\left(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \dots, x'_n\alpha\right)}{f\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_n\right)}. \qquad (1.2)$$

Тогда значение $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящее от первоначально принятой единицы измерения (единичной меры), можно записать как $y(1)$, значение размерной величины $y' = f(x_1\alpha, x_2\alpha, \dots, x_n\alpha)$ — как $y'(1)$, а выражение (1.2) как

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha). \qquad (1.3)$$

Здесь α — произвольно выбранное числовое значение масштаба измеряемой величины (кратная или дольная единица измерения). Величина, обозначаемая буквой φ, представляет собой числовое значение отношения значений измеряемой величины для заданного значения α. В зависимости от α получается множество φ, в котором эти величины функционально связаны. Таким образом, в уравнении (1.3) величины $y(\alpha)$, $y(1)$, $y'(\alpha)$ и $y'(1)$ не являются константами в принятом понимании, а представляют собой обобщенный индивидуальный параметр. Такое понятие является одним из центральных в теории размерностей и теории подобия.

Отсюда следует, что отношение числовых значений геометрической величины, измеренной в разных масштабах величин, зависит только от отношения масштабов величин (в данном случае длин). Из последнего соотношения нетрудно найти вид функции $\varphi(\alpha)$.

Так как на основании соотношения (1.3) $\dfrac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1)$, $\dfrac{y(\alpha_2)}{y(1)} = \varphi(\alpha_2)$, отсюда следует

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)}, \tag{1.4}$$

где α_1, α_2 — произвольно выбранные масштабы измерения величин или соотношения применяемых единиц измерения.

Так как $x'_1 = x_1\alpha_2$, $x'_2 = x_2\alpha_2$, ..., $x'_n = x_n\alpha_2$, получаем при использовании уравнения (1.3)

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{y'_1\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y'_1(1)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \tag{1.5}$$

Отсюда с учетом уравнений (1.4) и (1.5) следует

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \tag{1.6}$$

с последующим преобразованием уравнения (1.6)

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)\varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right). \tag{1.7}$$

Продифференцируем уравнение (1.7) по α_1:

$$\frac{\partial\varphi(\alpha_1)}{\partial\alpha_1} = \varphi(\alpha_2)\frac{\partial\varphi\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{\partial\alpha_1}\frac{1}{\alpha_2}. \tag{1.8}$$

Так как выбор масштаба α произволен, уравнение (1.8) будет справедливо при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1$. В этом случае это уравнение можно переписать в виде