ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Н. Н. ГОЛОВАНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебник
для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Информатика и вычислительная техника»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2011

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Г61

Рецензенты:

канд. техн. наук, доц. *Г. Ф. Горшков* (зав. кафедрой инженерной графики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики — технического университета (МИРЭА);
канд. техн. наук *В. А. Мартынюк* (доц. кафедры «Системы автоматизированного проектирования» Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана)

Голованов Н. Н.

Г61 Геометрическое моделирование : учебник для учреждений высш. проф. образования / Н. Н. Голованов. — М.: Издательский центр «Академия», 2011. — 272 с.

ISBN 978-5-7695-7168-8

Изложены методы построения кривых, поверхностей и твердых тел. Описан состав геометрических моделей, приведены принципы управления геометрическими моделями, рассмотрены применения геометрических моделей.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования. Может быть полезен прикладным математикам, программистам и специалистам по системам автоматизированного проектирования.

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73

ISBN 978-5-7695-7168-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга предназначена для тех, кто изучает, использует в работе или разрабатывает системы геометрического моделирования. Она посвящена математическому аппарату этих систем и содержит методы построения численных моделей геометрии реальных и воображаемых объектов.

Для описания формы моделируемого объекта в общем случае используются криволинейные поверхности, стыкующиеся друг с другом по своим краям. Обрезка и стыковка поверхностей выполняется одновременно с построением модели. Это обеспечивают методы построения геометрической модели и организация данных, описывающих поверхности. Поверхности объединены в оболочки, в которых каждый элемент содержит информацию о своих соседях. Для построения поверхностей используются кривые.

В книге изложены методы геометрического моделирования, включающие методы построения кривых и поверхностей, методы построения оболочек и тел, а также описание их алгоритмов и структур данных. Первые три главы книги посвящены способам описания и построения отдельных кривых и поверхностей. В последующих двух главах изложены методы построения оболочек и твердых тел, описываемых стыкующимися друг с другом поверхностями. В предпоследней главе приведены принципы, обеспечивающие взаимосвязь элементов модели и ее целостность при движении. В последней главе рассмотрены применения геометрических моделей.

В основу книги положен опыт работы автора над геометрическим ядром системы «Компас-3D». Автор выражает благодарность коллегам по работе за помощь и поддержку.

Посвящается Марии

ВВЕДЕНИЕ

С развитием компьютеров появилась возможность создавать численные модели различных объектов и экспериментировать с ними. Численные модели используются в системах, выполняющих проектирование (Computer Aided Design), расчеты (Computer Aided Engineering) и производство (Computer Aided Manufacturing) моделируемых объектов. Во всех этих системах с той или иной точностью требуется описать геометрическую форму моделируемых объектов. В процессе развития этих систем сформировалась область прикладной математики, которая называется геометрическим моделированием.

Геометрическое моделирование изучает методы построения численных моделей геометрии реальных или воображаемых объектов, а также методы управления этими моделями.

Геометрическая модель содержит описание формы моделируемого объекта и описание связей элементов модели. Для возможности редактирования и создания подобных моделей в геометрическую модель часто включают дерево построения, хранящее последовательность и способы построения модели. Элементы геометрической модели, как правило, наделяют атрибутами, которые несут информацию о физических и других свойствах этих элементов.

Геометрическое моделирование начало свое развитие с систем компьютерного черчения. Позже появились системы каркасного и поверхностного моделирования. Компьютерные системы параметрического твердотельного моделирования кардинально изменили технологию работы конструктора. Они позволили фиксировать конструкторскую мысль не в виде плоского чертежа, а в виде трехмерной модели. Для описания связей элементов модели стали применяться вариационные методы. Еще одним шагом в развитии геометрического моделирования являются методы синхронного моделирования (Direct Modeling), расширяющие возможности конструктора и дизайнера.

Окружающие нас объекты занимают некоторый конечный объем пространства. Для моделирования этих объектов нужно описать занимаемую ими часть пространства. В определенных случаях это можно сделать с помощью элементов объема моделируемого объекта. Элементы объема называют ***вокселами***. Часто элементами объема служат кубы, призмы и пирамиды. Такие модели используются в случаях, когда атрибуты элементов объема модели имеют большее значение, чем геометрическая форма модели.

С определенной степенью точности геометрическую форму объектов можно описать, используя плоские грани. Такое представление называют *полигональным*, или *фасетным*. Криволинейные поверхности полигональное представление аппроксимирует набором пластин треугольной или четырехугольной формы. Использование плоских граней значительно упрощает работу с моделью. Плоскогранную модель обычно строят на основе замеров реальных объектов или на основе другой модели. Полигональное представление широко применяется для визуализации геометрических моделей.

Многие объекты можно получить, используя поступательное и вращательное движения. Элементы поверхности таких объектов описываются плоскостью, поверхностью сферы, поверхностью цилиндра, поверхностью конуса, поверхностью тора. Все перечисленные поверхности делят пространство на две части и для них можно указать, с какой стороны поверхности находится внутренний объем моделируемого объекта. Используя для моделирования такие поверхности, можно построить геометрическую модель путем выполнения операций над примитивами, к которым, как правило, относят прямоугольную призму, треугольную призму, сферу, цилиндр, конус, тор. Так устроена конструктивная твердотельная геометрия (CSG).

Наиболее общий подход к описанию геометрической формы моделируемого объекта использует поверхности произвольной формы, представленные в явном виде. Этот подход состоит в представлении поверхности моделируемого объекта совокупностью граней, стыкующихся по ребрам и содержащих информацию о своих границах и связях с соседями. Грани стыкуются так, что внешняя сторона одной грани переходит во внешнюю сторону соседней грани. Грани могут иметь произвольную форму. Такое описание формы моделируемого объекта называется *граничным представлением* (Boundary Representation). Оно дает возможность выполнять над моделями множество операций, сохраняя при этом единый способ их внутреннего устройства. Граничное представление содержит точное описание границы моделируемого объекта, отделяющей его от остальной части пространства.

Между элементами геометрической модели устанавливают вариационные связи, поддерживающие совпадение точек, осей и плоскостей, принадлежность объекта плоскости, касание поверхностей и многие другие зависимости. Взаимозависимости элементов модели называют *геометрическими ограничениями*. Связанными могут быть различные размеры одного объекта и нескольких объектов. Через такие связи легко редактировать модель и создавать подобные модели. Как правило, геометрические ограничения могут быть удовлетворены не единственным образом. Геометрическое моделирование изучает методы поиска решения, которое соответствует поставленной практической задаче.

В разработке своих методов геометрическое моделирование опирается на другие области математики, в первую очередь на дифференциальную геометрию и численные методы. Геометрическое моделирование тесно связано с программированием, оно в полной мере востребовало особенности объектно-ориентированного подхода: сокрытие данных, наследование, переопределение семантики операций. Например, объектно-ориентированное программирование позволяет создавать кривые и поверхности, обладающие некоторым множеством общих методов, скрыв реализацию этих методов каждой конкретной кривой и поверхности и используемые для этого данные.

Геометрическую модель применяют для визуализации моделируемого объекта, проверки собираемости, кинематической проверки, вычисления инерционных характеристик, расчета траектории режущего инструмента, проектирования оснастки и других этапов подготовки производства. С помощью геометрической модели выполняют численные эксперименты и производство моделируемого объекта. Для этого используются атрибуты элементов модели, описывающие физические и другие свойства моделируемого объекта.

Геометрическое моделирование позволяет сократить время и материальные затраты на производство проектируемых объектов и повысить их качество. Геометрическое моделирование автоматизирует труд дизайнеров, конструкторов, архитекторов, технологов, позволяет им уйти от рутинных работ и сосредоточиться на творчестве.

Глава 1
КРИВЫЕ

Геометрическая модель содержит описание формы моделируемого объекта. Геометрическая форма описывается поверхностями. Для построения поверхностей используются кривые. С кривых начинается геометрический дизайн. В геометрическом моделировании широко применяются кривые, которыми легко управлять. Управление кривыми осуществляется путем изменения данных, на основе которых они построены. Кривые могут быть построены с помощью аналитических функций, по набору точек, на основе других кривых и на базе поверхностей.

1.1. Кривая

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве выбрана декартова прямоугольная система координат с фиксированным ортонормированным базисом. Для обозначения столбца координат точек и компонент векторов будем использовать строчные буквы латинского алфавита, выделенные полужирным шрифтом, например

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Радиусом-вектором будем называть преобразование, переводящее начальную точку декартовой системы координат в точку пространства с заданными координатами.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будем обозначать через $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Векторное произведение — через $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Кривой будем называть векторную функцию

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

скалярного параметра t, принимающего значения на отрезке $[t_{\min}, t_{\max}]$. Пусть координаты $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ точки кривой $\mathbf{r}(t)$ являются однозначными непрерывными функциями параметра t. Такое описание кривой называется *явным*, или *параметрическим*.

Точку кривой будем называть *обыкновенной*, если в этой точке не обращается в нуль длина первой производной кривой по параметру. В противном случае точку кривой будем называть *особой*.

Кривую будем называть *периодической*, если существует $p > 0$, такое, что $\mathbf{r}(t \pm kp) = \mathbf{r}(t)$, где k — целое число. Для устранения неоднозначности область определения периодической кривой должна лежать в пределах одного периода. Периодическую кривую будем называть *циклически замкнутой*, если $p = t_{\max} - t_{\min}$.

Область изменения параметра кривой есть отрезок $[t_{\min}, t_{\max}]$ в одномерном пространстве. Кривая представляет собой непрерывное отображение некоторого участка числовой оси в трехмерное пространство.

Введем обозначения

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt};\ \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2};\ \mathbf{r}''' = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$$

для производных кривой. В обыкновенной точке производная кривой есть вектор, направленный по касательной к кривой в сторону возрастания параметра. Единичный вектор

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{s'}, \tag{1.2}$$

где $s' = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}$ — длина первой производной кривой, называется *касательным вектором*. Длина первой производной зависит от способа параметризации кривой. Если в качестве параметра используется длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой ее точки, то длина производной равна единице. Векторная функция $\mathbf{r}(s)$, где s — длина дуги, называется кривой с *натуральной параметризацией*.

Предположим, что дана кривая с натуральной параметризацией. В этом случае касательный вектор равен первой производной кривой:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Построим в рассматриваемой точке кривой плоскость, перпендикулярную ее первой производной. Такая плоскость называется *нормальной плоскостью кривой*. Плоскость, в которой лежат и первая производная кривой и ее вторая производная, называется *соприкасающейся плоскостью*. Если вторая производная кривой параллельна первой производной или ее длина равна нулю, то в качестве соприкасающейся плоскости можно взять любую плоскость, в которой лежит первая производная кривой. Точка кривой, в которой векторы первой и второй производных кривой коллинеарны, называется *точкой распрямления*. Точки распрямления не зависят от способа параметризации кривой. Название соприкасающейся плоскости обусловлено тем, что она проходит через заданную точку кривой с наивысшим порядком касания, и ее можно определить как предельное положение плоскости, построенной по трем бесконечно близким точкам кривой. Плоскость, перпендикулярная нормальной и соприкасающейся плоскостям, называется *спрямляющей плоскостью*.

Единичный вектор, ортогональный касательному вектору, лежащий в соприкасающейся плоскости и направленный в сторону второй производной (в сторону вогнутости кривой), называется *главной нормалью* кривой. Главную нормаль обозначим через $\mathbf{n}$. Векторы первой и второй производной кривой с натуральной параметризацией ортогональны, так как $\frac{d(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t})}{ds} = 2\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds} = 2\mathbf{t}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$. Следовательно, вторая производная кривой с натуральной параметризацией направлена по главной нормали

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = k\mathbf{n},$$

где k — коэффициент, называемый *кривизной* кривой. Обратная кривизне кривой величина равна радиусу соприкасающейся с кривой в рассматриваемой точке окружности.

Единичный вектор, направленный вдоль линии пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей и образующий с касательным и нормальным векторами правую тройку векторов, называется *бинормалью* кривой. Бинормаль обозначим через $\mathbf{b}$. Бинормаль по определению ортогональна касательному вектору и главной нормали. Из этого следует, что

$$\frac{d(\mathbf{b}\cdot\mathbf{t})}{ds} = \mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{ds} + \mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0;$$

$$\frac{d(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})}{ds} = 2\mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0.$$

Таким образом, производная бинормали по длине дуги кривой ортогональна векторам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$ и, следовательно, параллельна главной нормали. Данное понятие принято записывать в виде

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n},$$

где χ — коэффициент, называемый *кручением* кривой.

Используя производные касательного вектора и бинормали кривой с натуральной параметризацией, найдем производную нормали по длине дуги:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d(\mathbf{b}\times\mathbf{t})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\mathbf{t} + \mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds} = = -\chi\mathbf{n}\times\mathbf{t} + k\mathbf{b}\times\mathbf{n} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t}.$$

Нами получены ***формулы Френе—Серре***

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n};\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \chi\mathbf{b} - k\mathbf{t};\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\chi\mathbf{n},$$

которые выражают дифференциальные зависимости между касательным вектором $\mathbf{t}$, главной нормалью $\mathbf{n}$ и бинормалью $\mathbf{b}$. Векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n};\ \mathbf{t} = \mathbf{n}\times\mathbf{b};\ \mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t}.$$

Совокупность нормальной, соприкасающейся, спрямляющей плоскостей и векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ называется *сопровождающим трехгранником* *кривой*. Кручение кривой равно угловой скорости вращения сопровождающего трехгранника вокруг касательного вектора при его движении вдоль кривой. Если кручение равно нулю, то кривая является плоской. Полный вектор угловой скорости вращения сопровождающего трехгранника по отношению к пути, проходимому по кривой, называется *вектором Дарбу*. Он равен

$$\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{b} + \chi\mathbf{t}.$$

Вектор Дарбу придает механический смысл формулам Френе—Серре, с использованием которого последние имеют вид

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{t},\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{n},$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}.$$

Кривизну и кручение кривой с натуральной параметризацией вычислим по формулам

$$k = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|;\ \chi = \frac{1}{k^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Как правило, параметризация кривой не является натуральной. Используя приведенные формулы для кривой с натуральной параметризацией, получим формулы, связывающие главную нормаль, бинормаль, кривизну и кручение с производными кривой при произвольной параметризации. Производные кривой с различной параметризацией связаны соотношениями:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt},$$
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$
$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

В общем случае кривизну кривой вычислим по формуле

$$k = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}. \tag{1.3}$$

В точках кривой с отличной от нуля кривизной главная нормаль, бинормаль, радиус кривизны ρ и кручение кривой вычислим по формулам

$$k\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|^4}\mathbf{r}';$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{k|\mathbf{r}'|^3};$$

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|};$$

$$\chi = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}. \qquad (1.4)$$

Из приведенных формул видно, что кривизна всегда неотрицательна, а кручение может иметь любой знак. Если кривизна равна нулю, то направление главной нормали, бинормали и кручение не определены. Если кривизна равна нулю в каждой точке кривой, то кривая является отрезком прямой. Главная нормаль в этом случае может иметь произвольное направление в нормальной плоскости. Если первая, вторая и третья производные кривой параллельны, то кручение кривой равно нулю и кривая является плоской.

1.2. Аналитические кривые

Аналитическими кривыми будем называть кривые, координаты которых в некоторой локальной системе координат можно описать с помощью аналитических функций, не используя точки, векторы и другие кривые.

Для аналитических кривых используются локальные системы координат, в которых кривые имеют канонический вид.

Построим локальную декартову прямоугольную систему координат с началом в точке $\mathbf{p}$ и базисными векторами $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$. Кривая, координаты которой в локальной системе равны соответственно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, будет описываться векторной функцией

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + x(t)\mathbf{i}_x + y(t)\mathbf{i}_y + z(t)\mathbf{i}_z. \qquad (1.5)$$

Пусть p_i — координаты начала $\mathbf{p}$ локальной системы координат, x_i — компоненты базисного вектора $\mathbf{i}_x$, y_i — компоненты базисного вектора $\mathbf{i}_y$, z_i — компоненты базисного вектора $\mathbf{i}_z$, $i = 1, 2, 3$. Тогда аналитическая кривая будет представлять собой функцию

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Координаты кривой (1.5) равны

$$r_i(t) = p_i + x(t)x_i + y(t)y_i + z(t)z_i.$$

При изменении положения или ориентации подобным образом описанной аналитической кривой изменяются координаты начала местной системы координат и ее базисные векторы, а аналитические функции кривой остаются неизменными, сохраняя канонический вид. Рассмотрим примеры аналитических кривых.

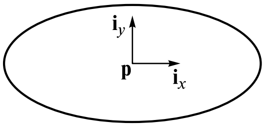

Рис. 1.1

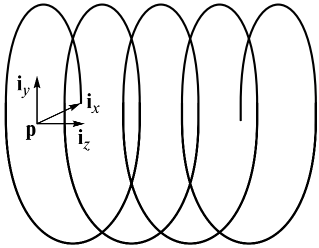

Рис. 1.2

Дугу эллипса опишем векторной функцией

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a\cos t\,\mathbf{i}_x + b\sin t\,\mathbf{i}_y, \tag{1.6}$$

$$t_{\min} \le t \le t_{\max},$$

где a и b — полуоси эллипса, $0 \le t_{\min} < 2\pi$ — начальный параметр дуги, $t_{\min} < t_{\max} \le \alpha + 2\pi$ — конечный параметр дуги. Начало $\mathbf{p}$ локальной системы координат мы расположили в центре эллипса, базисные векторы $\mathbf{i}_x$ и $\mathbf{i}_y$ направили вдоль полуосей. Скалярные функции $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ эллипса связаны уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

При области определения параметра $t_{\max} = t_{\min} + 2\pi$ получим ***эллипс*** (рис. 1.1). Эллипс является циклически замкнутой кривой.

При $t_{\max} - t_{\min} < 2\pi$ получим ***дугу эллипса***, при $a = b$ и $t_{\max} = t_{\min} + 2\pi$ — ***окружность***.

Спираль радиусом r, шагом h и параметрической длиной $t_{\max} - t_{\min}$ опишем векторной функцией

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + r\cos(t)\ \mathbf{i}_x + r\sin(t)\ \mathbf{i}_y + \frac{ht}{2\pi}\mathbf{i}_z. \tag{1.7}$$

Начало локальной системы координат спирали мы расположили в точке пересечения оси и торцевой плоскости спирали, базисный вектор $\mathbf{i}_z$ направили вдоль оси спирали. При равенстве длин и ортогональности базисных векторов в локальной системе координат получим ***цилиндрическую спираль*** (рис. 1.2).

При $h = 0$ формула (1.7) будет описывать радиус-вектор окружности или ее дуги в плоскости базисных векторов $\mathbf{i}_x$ и $\mathbf{i}_y$.

1.3. Кривые, построенные по набору точек

Рассмотрим построение кривых, которые при значениях параметра $t_0, t_1, \ldots, t_n$ проходят через заданные точки $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$. Точки $\mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, называют *опорными*, или *контрольными*, *точками* кривой, а па-