Высшее профессиональное образование
БАКАЛАВРИАТ

ГЕОМЕТРИЯ

В ДВУХ ТОМАХ

Том 1

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по образованию в области подготовки
педагогических кадров в качестве
учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по специальности «Математика», направлению
«Педагогическое образование» (профиль «Математика»)

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2012

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Г361

Авторы:
В. Ф. Кириченко, Н. И. Гусева, Н. С. Денисова, Л. А. Игнаточкина,
А. В. Никифорова, О. Ю. Тесля

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. *Л. Е. Евтушик* (кафедра математического анализа Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова);
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. В. Савинов* (кафедра геометрии Московского педагогического государственного университета)

Г361 **Геометрия**: учеб. пособие для студ. учреждений высш. пед. проф. образования: в 2 т. Т. 1 / [В. Ф. Кириченко, Н. И. Гусева, Н. С. Денисова и др.]. — М.: Издательский центр «Академия», 2012. — 400 с. — (Сер. Бакалавриат).

ISBN 978-5-7965-8802-0 (т. 1)

Учебное пособие создано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Математика» (квалификация «бакалавр»).

Учебное пособие содержит материал по аналитической геометрии плоскости, трехмерного пространства и многомерного пространства.

В пособие включены примеры, помогающие студентам освоить теоретический материал. В конце каждой главы помещены задачи основных типов с решениями, а также задачи для самостоятельного решения.

Для студентов учреждений высшего педагогического профессионального образования.

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73

ISBN 978-5-7965-8802-0 (т. 1)
ISBN 978-5-7965-8803-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие наследует и в то же время развивает и совершенствует традиции, заложенные в широко известных учебниках по геометрии, например в двухтомнике «Геометрия» Л. С. Атанасяна и В. Т. Базылева. Изложение материала в предлагаемом пособии основано на опыте, накопленном авторами в процессе многолетнего преподавания курса геометрии на кафедре геометрии математического факультета в Московском педагогическом государственном университете.

Хорошо известно, что в геометрии четко прослеживаются два подхода к решению геометрических задач — аналитический и синтетический. Начало первому из них было положено Рене Декартом, и он воплотился в математическую дисциплину, известную как аналитическая геометрия. Рассмотрению этого подхода посвящены первые четыре главы данного курса. Рабочим аппаратом аналитической геометрии является векторная алгебра, рассмотренная в гл. 1 книги, и метод координат, являющийся связующим звеном между (векторной) алгеброй и (аналитической) геометрией, подробно изложенным в гл. 2. Изучению геометрии прямых на плоскости и прямых и плоскостей в пространстве методом координат посвящена гл. 3. В гл. 4 подробно рассматривается геометрия линий второго порядка на плоскости и поверхностей второго порядка в пространстве. В гл. 5 изучаются преобразования плоскости и пространства. Наконец, гл. 6 посвящена многомерным обобщениям основных понятий аналитической геометрии и построению на этой базе начал аффинной и евклидовой геометрии.

Современное начало второго — синтетического — подхода было положено Феликсом Клейном в его знаменитой Эрлангенской программе, где впервые был рассмотрен групповой метод в геометрии. Мы надеемся, что материал, изложенный в гл. 5 данного пособия, облегчит читателю понимание сути группового подхода в геометрии.

Характерной особенностью данного курса является то, что различные вопросы аналитической геометрии, относящиеся к плоскости и трехмерному пространству, рассматриваются параллельно. Это позволяет студентам более глубоко понять идеи, заложенные в разных разделах курса, сократить объем разделов в тех случаях, когда аналогичные вопросы, относящиеся к геометрии на плоскости и геометрии в пространстве, излагаются по одной схеме.

Данный курс геометрии представляет собой максимально полное изложение всех разделов аналитической геометрии, входящих в программу педагогических вузов. Это позволяет использовать его для студентов, обучающихся по разным специальностям.

Следует отметить, что курс снабжен большим количеством примеров, иллюстрирующих теоретический материал. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения, часть из которых снабжена решениями, что позволит студентам включиться в эффективную самостоятельную работу по курсу геометрии. В конце пособия помещены ответы и указания к этим задачам.

Особое внимание в данном пособии уделено педагогической направленности курса геометрии. Во многих главах выделены задачи элементарной геометрии, решаемые методами аналитической геометрии.

Объем данного курса геометрии позволяет отдельные разделы использовать для проведения спецкурсов, для работы над курсовыми работами и над выпускными квалификационными работами студентов.

Материалы гл. 1 и 6 подготовила Л. А. Игнаточкина, гл. 2 — А. В. Никифорова, гл. 3 — О. Ю. Тесля, гл. 4 — Н. И. Гусева, гл. 5 — Н. С. Денисова. Общее редактирование рукописи осуществлено В. Ф. Кириченко.

Глава 1

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1.1. Направленные отрезки и векторы

Рассмотрим евклидово пространство. Пусть прямые AB и CD параллельны. Тогда лучи AB и CD называются *одинаково направленными* (соответственно *противоположно направленными*), если они лежат в одной полуплоскости (соответственно в разных полуплоскостях) с границей AC. Если лучи AB и CD лежат на одной прямой, то они будут называться *одинаково направленными*, если один из них содержит другой, и *противоположно направленными* — в противном случае. Будем обозначать одинаково направленные лучи $AB \uparrow\uparrow CD$, а противоположно направленные обозначим $AB \uparrow\downarrow CD$.

Множество всех лучей пространства, любые два из которых одинаково направлены, называется *направлением*. Чтобы задать направление, достаточно указать один луч, принадлежащий этому направлению.

Отрезок AB называется *направленным*, если указаны его начало A и конец B. Направленные отрезки будем обозначать $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. *Длиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB, а направлением — направление луча AB.

Будем говорить, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *одинаково направлены или сонаправлены*, если одинаково направлены лучи AB и CD, и *противоположно направлены*, если противоположно направлены лучи AB и CD.

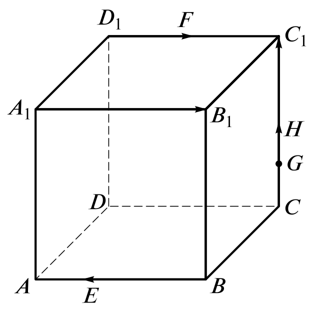

Рис. 1.1

Пример 1.1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 1.1). Сонаправленные направленные отрезки: $\overline{D_1F}$ и $\overline{A_1B_1}$; $\overline{CC_1}$ и $\overline{GH}$. Противоположно направленные направленные отрезки: $\overline{BE}$ и $\overline{A_1B_1}$; $\overline{D_1F}$ и $\overline{BE}$. Направленные отрезки, которые не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными: $\overline{BE}$ и $\overline{BC}$; $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{GH}$. ■

Две совпавшие точки будем называть *нулевым направленным отрезком* и обозначать $\overline{MM} = \overline{0}$. По определению будем считать длину нулевого направленного отрезка равной нулю. Направление нулевого направленного отрезка не определено.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквиполентными*, если они сонаправлены и имеют равные длины.

Легко доказать, что отношение эквиполентности обладает следующими свойствами:

1°. *Направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен самому себе* (рефлексивность).

2°. *Если направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{CD}$, то направленный отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{AB}$* (симметричность).

3°. *Если направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{CD}$ и направленный отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{PQ}$, то направленный отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен направленному отрезку $\overline{PQ}$* (транзитивность).

Вектором называется множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполентны. Каждый направленный отрезок этого множества называется *представителем* вектора. Будем обозначать векторы $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. *Длиной* (соответственно *направлением*) вектора называется длина (соответственно направление) любого его представителя. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

Определение длины и направления вектора корректно. В самом деле, все направленные отрезки, принадлежащие одному вектору, имеют равные длины и сонаправлены. Итак, каждый вектор однозначно характеризуется своими длиной и направлением.

Множество всех нулевых направленных отрезков называется *нуль-вектором* и обозначается $\vec{0}$. Длина нуль-вектора равна нулю, а направление не определено. Будем обозначать множество всех векторов V^3.

Лемма 1. *Для любого ненулевого направленного отрезка $\overline{AB}$ и любой точки O существует единственная точка C, для которой направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны.*

□ Рассмотрим два случая расположения точки O и прямой AB.

1. Пусть точка O не принадлежит прямой AB. Докажем сначала, что точка C существует. Для этого нам нужно указать способ ее построения. Нам даны точки O, A, B. Проведем через точку O прямую, параллельную прямой AB (рис. 1.2), а через точку B — прямую, па-

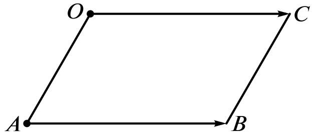

Рис. 1.2

раллельную прямой AO. Эти прямые пересекутся в точке C. Убедимся, что она искомая. Для этого нужно доказать, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны, т.е. имеют равные длины и одинаковые направления.

Действительно, так как $ABCO$ — параллелограмм, отрезки AB и OC равны и параллельны. Кроме того, лучи AB и OC лежат в одной полуплоскости с границей AO. Тогда по определениям сонаправленных направленных отрезков и эквиполентных направленных отрезков получаем, что направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны, а значит, точка C — искомая.

Докажем единственность точки C. Пусть существует еще одна точка D, такая, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны. Тогда из свойств симметричности и транзитивности отношения эквиполентности следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны. В частности, из определения эквиполентных направленных отрезков следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ сонаправлены, а значит, должны быть либо параллельны, либо лежать на одной прямой (по определению сонаправленных направленных отрезков). Так как они имеют общую точку O, то параллельными быть не могут, а значит, точки O, C, D лежат на одной прямой и точки C, D лежат по одну сторону от точки O. Кроме того, из определения эквиполентных направленных отрезков следует, что направленные отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OC}$ имеют равные длины, а значит, точки O и D совпадают.

2. Пусть точка O принадлежит прямой AB. Возьмем точку O_1, не принадлежащую прямой AB. Для точки O_1 существует точка C_1, такая, что направленные отрезки $\overline{O_1C_1}$ и $\overline{AB}$ эквиполентны (по доказанному в п. 1). Для направленного отрезка $\overline{O_1C_1}$ и точки O (также по п. 1) существует точка C, такая, что направленные отрезки $\overline{O_1C_1}$ и $\overline{OC}$ эквиполентны. Тогда по свойствам отношения эквиполентности получим, что эквиполентны направленные отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$. Единственность доказывается аналогично п. 1. ■

Замечание 1. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ и произвольный его представитель $\overline{AB}$. Из доказанной леммы следует, что для задания вектора достаточно указать один его представитель в какой-нибудь точке пространства. Тогда в любой другой точке O пространства мы сможем однозначно построить представитель данного вектора. Будем говорить при этом, что *вектор* $\vec{a}$ *отложен от точки* O.

Два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются *одинаково направленными*, *или сонаправленными* (соответственно *противоположно направленными*), если сонаправлены (соответственно противоположно направлены) их представители. Обозначение $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ соответственно. Положим по определению, что нуль-вектор сонаправлен с любым вектором.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть ***коллинеарными***, если они либо сонаправлены, либо противоположно направлены. Обозначение $\vec{a}\parallel\vec{b}$. По определениям сонаправленности для векторов и направленных отрезков получим, что два ненулевых вектора являются коллинеарными тогда и только тогда, когда у них существуют параллельные представители.

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ является представителем ненулевого вектора $\vec{a}$. Тогда направленный отрезок $\overline{BA}$ задает вектор, который мы будем называть ***противоположным*** вектору $\vec{a}$ и обозначать $-\vec{a}$. Другими словами, вектор называется противоположным вектору $\vec{a}$, если он имеет такую же длину, как и вектор $\vec{a}$, и противоположно направлен с ним. Если мы построим противоположный к противоположному вектору вектора $\vec{a}$, то получим сам вектор $\vec{a}$, т.е. $-(-\vec{a})=\vec{a}$.

По определению положим, что противоположным нуль-вектору будет нуль-вектор.

Будем говорить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ***равны***, и писать $\vec{a}=\vec{b}$, если они имеют равные длины и одинаковые направления, т.е. эти векторы совпадают как множества направленных отрезков.

§ 1.2. Сложение и вычитание векторов

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. Направленный отрезок $\overline{AC}$ будет представителем некоторого вектора $\vec{c}$, который называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Докажем корректность определения, т.е. его независимость от выбора точки A. Нам нужно доказать, что если взять другую точку A_1 и провести аналогичные построения, то получится представитель $\overline{A_1C_1}$ того же вектора $\vec{c}$. Проведем доказательство для случая, когда точка A_1 не принадлежит прямой AB (рис. 1.3), второй случай рассмотрите самостоятельно, используя рис. 1.4.

Так как направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ эквиполентны, четырехугольник ABB_1A_1 является параллелограммом, следовательно, его стороны AA_1 и BB_1 параллельны и равны. Аналогично из эквиполентности направленных отрезков $\overline{BC}$ и $\overline{B_1C_1}$ получаем, что BCC_1B_1 —

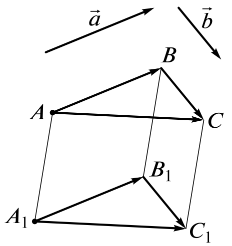

Рис. 1.3

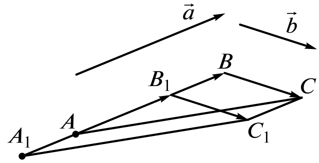

Рис. 1.4

параллелограмм и его стороны BB_1 и CC_1 параллельны и равны. Тогда параллельны и равны отрезки AC и A_1C_1, следовательно, ACC_1A_1 — параллелограмм (по признаку), а значит, направленные отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{A_1C_1}$ эквиполентны, т.е. принадлежат одному и тому же вектору $\vec{c}$.

Запишем определение суммы векторов в других обозначениях.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{1.1}$$

В таком виде определение суммы векторов называется *правилом треугольника*. Оно верно для любых точек A, B, C.

Пусть в (1.1) совпадают точки A и C, т.е. $A = C$. Тогда (1.1) примет вид $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ или в других обозначениях $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Аналогично, полагая сначала $A = B$, а затем $B = C$, получаем еще два тождества. Итак,

$$1)\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};\quad 2)\ \vec{0} + \vec{a} = \vec{a};\quad 3)\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \tag{1.2}$$

Докажем другие свойства операции сложения векторов.

Теорема 1. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, принадлежащих V^3, имеем*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

□ Возьмем произвольную точку A (рис. 1.5) и отложим от нее представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$. От точки B отложим представитель $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. От точки C отложим представитель $\overline{CD}$ вектора $\vec{c}$. Тогда, используя правило треугольника, эти три вектора мы можем сложить

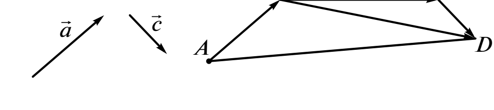

Рис. 1.5

двумя разными способами: во-первых, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$, а во-вторых, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$. Следовательно, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. ■

Теорема 2. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, принадлежащих V^3, имеем*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

□ 1. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то теорема верна в силу (1.2).

2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Возьмем произвольную точку A (рис. 1.6) и отложим представитель $\overline{AB}$ вектора $\vec{a}$ и представители $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ вектора $\vec{b}$. Тогда $ABCD$ является параллелограммом (по признаку), следовательно, $\overline{DC}$ является представителем вектора $\vec{a}$. По правилу треугольника, с одной стороны, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$, а, с другой стороны, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Итак, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

3. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые коллинеарные векторы. Возьмем произвольную точку A (рис. 1.7) и отложим представители векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как показано на рисунке: $\overline{AB}$ принадлежит вектору $\vec{a}$, $\overline{BC}$ принадлежит вектору $\vec{b}$. Возьмем произвольную точку D, не принадлежащую прямой AB. Тогда, используя доказанный п. 2, правило треугольника и теорему 1 § 1.2, мы получим цепочку равенств:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{DB}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}+\overrightarrow{BD}\right)=\left(\vec{b}+\overrightarrow{DB}\right)+$$

$$+\left(\overrightarrow{BD}+\vec{a}\right)=\vec{b}+\left(\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{DB}+\vec{a}\right)\right)=\vec{b}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)+\vec{a}=\vec{b}+\left(\vec{0}+\vec{a}\right)=\vec{b}+\vec{a}.$$

■

В качестве следствия теоремы 2 § 1.2 мы получаем еще одно правило для сложения неколлинеарных векторов (рис. 1.8): $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Оно называется *правилом параллелограмма*.

Следствие 1. *Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.*

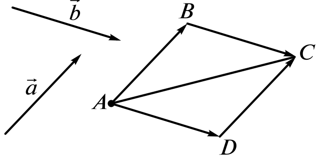

Рис. 1.6

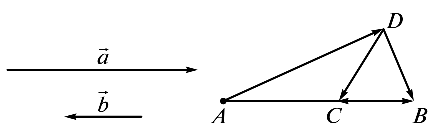

Рис. 1.7

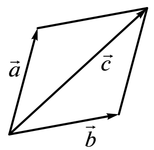

Рис. 1.8

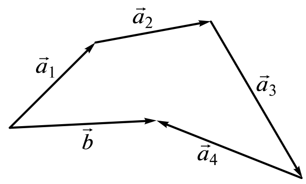

Рис. 1.9

□ Рассмотрим равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и прибавим к обеим его частям вектор $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$. Тогда по правилу треугольника и теореме 2 § 1.2 получим $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. ■

Пусть даны n ($n>2$) векторов $\overline{a_1},\ldots,\vec{a}_n$. *Суммой* векторов $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b}=\left(\ldots\left(\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)+\vec{a}_3\right)+\ldots+\vec{a}_n\right)$. Другими словами, для нахождения суммы n векторов нужно сначала сложить первые два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по правилу треугольника, затем найти сумму полученного вектора и вектора $\vec{a}_3$ и т.д.

В силу теоремы 1 § 1.2 скобки в определении суммы n векторов можно не писать и обозначать сумму данных векторов $\vec{b}=\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_n$. В силу теоремы 2 § 1.2 не важен порядок, в котором складываются векторы.

Из правила треугольника легко вытекает правило для сложения n векторов. Оно называется *правилом многоугольника*. Чтобы сложить n векторов, нужно от произвольной точки пространства отложить представитель $\overline{a_1}$ первого вектора $\vec{a}_1$ суммы, от его конца представитель $\overline{a_2}$ второго вектора и т.д. Тогда представителем $\overline{b}$ суммы $\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_n$ будет направленный отрезок с началом в начале $\overline{a_1}$ и концом в конце $\overline{a_n}$.

Пример 1.2. $\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4$ (рис. 1.9).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$. Обозначение $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. Напомним, что $-\vec{b}$ обозначает вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

Замечание 1.

1. Из определения разности векторов вытекает правило для построения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.10): чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, нужно сложить вектор $\vec{a}$ и вектор, противоположный вектору $\vec{b}$ (например, по правилу треугольника).

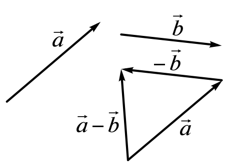

Рис. 1.10

2. Пусть дано равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Прибавим к обеим его частям вектор $-\vec{b}$. Тогда с учетом теоремы 1 § 1.2 получим $\vec{a}+\left(\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)\right)=$ $=\vec{c}+\left(-\vec{b}\right)$, т. е. $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$. Итак, вектор можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

§ 1.3. Произведение вектора на число

Напомним, что каждый вектор однозначно характеризуется своими длиной и направлением. Значит, для того чтобы задать вектор, нужно указать его длину и направление.

Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называется такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $\left|\vec{b}\right|=|\alpha||\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha \geq 0$, и вектор $\vec{b}$ противоположно направлен с вектором $\vec{a}$, если $\alpha < 0$. Обозначение $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

Заметим, что первый пункт определения произведения вектора на число задает длину вектора $\vec{b}$, а второй — его направление. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является однозначно определенным.

Лемма 1. $\alpha\vec{a}=\vec{0}$ *тогда и только тогда*, *когда* $\alpha = 0$ *или* $\vec{a}=\vec{0}$.

□ 1. Пусть $\alpha = 0$ или $\vec{a}=\vec{0}$. Тогда по определению произведения вектора на число вектор $\alpha\vec{a}$ имеет длину $|\alpha||\vec{a}|=0$, т. е. является $\vec{0}$.

2. Обратно, пусть $|\alpha||\vec{a}|=\vec{0}$. Тогда длина вектора $\alpha\vec{a}$ равна 0, т. е. $|\alpha||\vec{a}|=0$. Следовательно, $|\alpha|=0$ или $|\vec{a}|=0$. Так как только нуль-вектор имеет длину 0, то получаем $\alpha = 0$ или $\vec{a}=\vec{0}$. ■

Теорема 1. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ из V^3 и любых вещественных чисел* α, β:

1) $1\vec{a}=\vec{a}$; $\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$;

2) $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$;

3) $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

4) $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

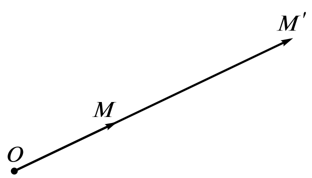

Рис. 1.11

Для доказательства теоремы 1 нужно вспомнить определение гомотетии. Пусть фиксирована точка O и ненулевое вещественное число m (рис. 1.11). Будем говорить, что в пространстве задана *гомотетия* с центром в точке O и *коэффици-*

ентом m, если каждой точке M пространства ставится в соответствие такая точка M', что

$$\overrightarrow{OM'} = m\overrightarrow{OM}. \qquad (1.3)$$

Замечание 1. Применяя определение произведения вектора на число к (1.3), получим $|\overrightarrow{OM'}| = |m||\overrightarrow{OM}|$ или в других обозначениях $OM' = |m|OM$.

Лемма 2. *Если гомотетия с центром O и коэффициентом m переводит треугольник OAB в треугольник OA'B', то* $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$.

□ Из замечания 1 § 1.3 следует, что треугольники OAB и $OA'B'$ подобны с коэффициентом подобия $|m|$. Тогда $A'B' = mAB$. Если $m >$ > 0 (рис. 1.12), то векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, а значит, по определению произведения вектора на число $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. Если $m <$ < 0 (рис. 1.13), то векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлены и опять по определению произведения вектора на число получаем $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$. ■

□ Доказательство теоремы 1. 1) Докажем, что $1\vec{a} = \vec{a}$ (второе равенство доказывается аналогично). Обозначим $\vec{b} = 1\vec{a}$. Нужно доказать, что $\vec{b} = \vec{a}$. Напомним: чтобы доказать равенство двух векторов, нужно показать, во-первых, что равны их длины и, во-вторых, что векторы сонаправлены. Имеем, во-первых, по определению произведения вектора на число $|\vec{b}| = |1||\vec{a}| = 1|\vec{a}| = |\vec{a}|$. Во-вторых, так как $1 > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Следовательно, $\vec{b} = 1\vec{a}$.

2) Докажем, что $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Пусть $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда равенство верно в силу леммы 1 § 1.3. Пусть $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда обозначим $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$. Нужно доказать, что $\vec{p} = \vec{q}$. По определению произведения вектора на число получим $|\vec{p}| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$ и $|\vec{q}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, следовательно, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Чтобы доказать, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены, нужно рассмотреть четыре случая для знаков чисел α и β. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ (остальные три случая рассматриваются

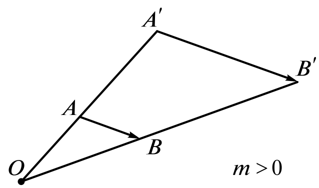

Рис. 1.12

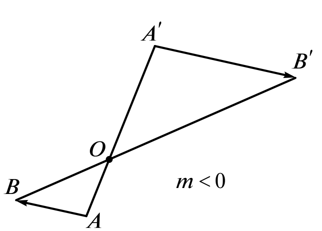

Рис. 1.13

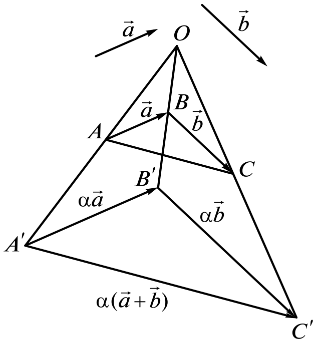

Рис. 1.14

аналогично). По определению произведения вектора на число получим $\vec{p}=\alpha(\beta\vec{a})\uparrow\uparrow\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, т.е. $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Аналогично, так как число $\alpha\beta<0$, получим $\vec{q}=(\alpha\beta)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Итак, $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $\vec{q}\uparrow\downarrow\vec{a}$, а значит, $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$.

Мы доказали, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ имеют равные длины и сонаправлены, а значит, равны.

3) Докажем, что $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Возьмем произвольную точку A (рис. 1.14) и отложим от нее направленный отрезок $\overline{AB}$ — представитель вектора $\vec{a}$, $\overline{BC}$ — представитель вектора $\vec{b}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Возьмем произвольную точку O, не лежащую на прямых AB, BC, AC, и рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом α. При этой гомотетии точки A, B, C перейдут соответственно в точки A', B', C'. Согласно лемме 2 § 1.3 получаем $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{AC}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$, т.е. $\alpha\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{BC}$ или в других обозначениях $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

4) Докажем, что $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Обозначим $\vec{p}=(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\vec{q}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Рассмотрим два случая:

а) числа α и β одного знака, т.е. $\alpha\beta>0$. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее направленный отрезок $\overline{AB}$ — представитель вектора $\alpha\vec{a}$ и направленный отрезок $\overline{BC}$ — представитель вектора $\beta\vec{a}$ (рис. 1.15). Так как числа α и β одного знака, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, а значит, точка B лежит между точками A и C. Тогда по определению произведения вектора на число и свойству модуля суммы чисел одного знака получим $|(\alpha+\beta)\vec{a}|=|(\alpha+\beta)||\vec{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\vec{a}|$. С другой стороны, так как точка B лежит между точками A и C,

$$|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\alpha\vec{a}|+|\beta\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|+|\beta||\vec{a}|=(|\alpha|+|\beta|)|\vec{a}|.$$

Таким образом, $|\vec{p}|=|\vec{q}|$.

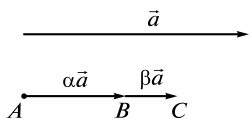

Рис. 1.15

Проверим сонаправленость векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Если $\alpha>0$ и $\beta>0$, то $\vec{p}=(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $\vec{q}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, т. е. $\vec{p}=\vec{q}$. Если $\alpha<0$ и $\beta<0$, то $\vec{p}=(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $\vec{q}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, т.е. опять $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Итак, $\vec{p}=\vec{q}$;

б) числа α и β разных знаков, т. е. $\alpha\beta < 0$.

Если $\alpha + \beta = 0$, то $(\alpha+\beta)\vec{a}=(\alpha-\alpha)\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}=\alpha\vec{a}+(-\alpha)\vec{a}=\alpha\vec{a}-\alpha\vec{a}=\vec{0}$, т. е. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Если $\alpha+\beta\neq 0$, то либо числа $-\alpha$, $\alpha + \beta$, либо числа $-\beta$, $\alpha + \beta$ имеют одинаковые знаки, а значит, к ним можно применить п. а). Рассмотрим числа $-\alpha$, $\alpha + \beta$ (второй случай рассматривается аналогично). Тогда для них по пункту а) и замечанию 1 § 1.2 имеем $(-\alpha+\alpha+\beta)\vec{a}=-\alpha\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}$, т. е. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. ■

Пример 1.3. Пусть дано равенство $6\vec{a}+3\vec{b}=9\vec{c}$. Умножим обе части этого равенства на число $\frac{1}{3}$. По теореме 1 § 1.3 получим $\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)\vec{b}=\left(9\cdot\frac{1}{3}\right)\vec{c}$, т. е. $2\vec{a}+\vec{b}=3\vec{c}$. В результате исходное равенство было разделено на 3.

Замечание 2. Заметим, что векторное равенство можно умножить или разделить (т. е. умножить на обратное) на любое ненулевое число. По теореме 1 § 1.3 на это число будут умножаться (соответственно делиться) коэффициенты перед векторами. Объединяя этот вывод с замечанием 1 § 1.2, видим, что действия с векторными равенствами аналогичны действиям с линейными уравнениями.

Теорема 2. *Пусть даны произвольные векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ из V^3, *причем вектор* $\vec{a}$ *отличен от нуль-вектора. Тогда векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует единственное вещественное число* α, *такое, что* $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

□ 1. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Нужно доказать, что существует единственное вещественное число α, такое, что $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. Докажем сначала существование числа α. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нам даны, то известны их длины $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. Из этих чисел будем строить число α. Положим

$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{если } \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b};\\[2ex] -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{если } \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}.\end{cases}$$

Проверим, что при таком α векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$ равны. Для этого нужно доказать равенство их длин и сонаправленность. По определению произведения вектора на число имеем $|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|=$

$=\left|\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Проверим сонаправленность векторов $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\alpha \geq 0$ и, следовательно, $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, следовательно, $\vec{b}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}$. Если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\alpha=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}<0$, следовательно, $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, т. е. $\vec{b}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}$. Итак, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ и существование числа α доказано.

Докажем единственность числа α. Пусть существует еще одно число α_1, такое, что $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}$. Тогда $\alpha\vec{a}=\alpha_1\vec{a}$ или $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}=\vec{0}$. Так как вектор $\vec{a}$ отличен от нуль-вектора по условию, то по лемме 1 (см. § 1.3) получим $\alpha - \alpha_1 = 0$, т. е. $\alpha = \alpha_1$. Получаем противоречие, которое доказывает единственность числа α.

2. Обратно, пусть $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. Тогда по определению произведения вектора на число векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ либо сонаправлены, либо противоположно направлены, т. е. коллинеарны по определению (см. § 1.1). ■

Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *параллелен прямой* l, если существует представитель $\overline{a}$ этого вектора, лежащий на прямой l. Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ *параллелен плоскости* σ, если существует его представитель $\overline{a}$, лежащий в этой плоскости.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ из V^3 называются *компланарными*, если существуют представители $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ этих векторов соответственно и плоскость σ, такие, что направленные отрезки $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ лежат в плоскости σ.

Пример 1.4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед (рис. 1.16). Тогда:

$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ — компланарные векторы;

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$ — некомпланарные векторы.

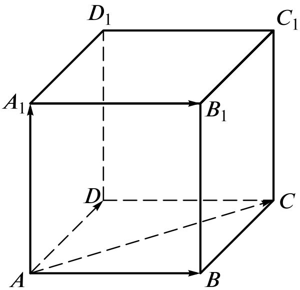

Рис. 1.16

Теорема 3. 1. *Если векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *из* V^3 *компланарны, а векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *не коллинеарны, то существует единственная пара вещественных чисел* α, β, *такая, что* $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

2. *Если для векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *из* V^3 *существуют вещественные числа* α, β, *такие, что* $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, *то* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарны.*

□ 1. Пусть даны компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *из* V^3, такие, что векторы $\vec{a}$ и

$\vec{b}$ не коллинеарны. Докажем существование чисел α и β. Возьмем произвольную точку O. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то их представители, отложенные от точки O, будут лежать в одной плоскости, т.е. направленные отрезки $\overline{OA}$ (представитель вектора $\vec{a}$), $\overline{OB}$ (представитель вектора $\vec{b}$) и $\overline{OC}$ (представитель вектора $\vec{c}$) лежат в одной плоскости. Рассмотрим два случая.

Пусть векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ коллинеарны (рис. 1.17). Аналогично рассматривается случай, когда коллинеарны векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$. Тогда по теореме 2 § 1.3 существует вещественное число α, такое, что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + 0\vec{b}$. Итак, в этом случае искомая пара чисел α, 0.

Пусть вектор $\vec{c}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$ (рис. 1.18). Через точку C проведем прямые, параллельные прямым OA и OB соответственно. Получим параллелограмм OC_2CC_1. По правилу параллелограмма имеем

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}. \tag{1.4}$$

Применим теорему 2 § 1.3 к парам векторов $\overrightarrow{OC_1}$, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OC_2}$, $\vec{b}$. В первом случае получим, что существует вещественное число α, такое, что $\overrightarrow{OC_1} = \alpha\vec{a}$, а во втором случае существует вещественное число β, такое, что $\overrightarrow{OC_2} = \beta\vec{b}$.

Подставляя эти равенства в (1.4), получим $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Таким образом, существование пары чисел α, β доказано и в этом случае.

Докажем единственность пары чисел α, β. Пусть существует еще одна пара вещественных чисел α_1, β_1, такая, что $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$. Тогда

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}. \tag{1.5}$$

Если $\alpha_1 = \alpha$, то из (1.5) следует, что $(\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}$. Так как по условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{b}$ отличен от нуль-вектора, а значит, по лемме 1 § 1.3 получим $\beta - \beta_1 = 0$, т.е. $\beta = \beta_1$. Получаем противоречие с предположением.

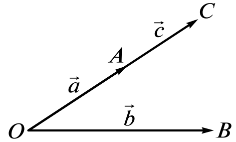

Рис. 1.17

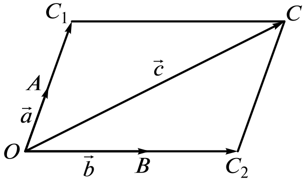

Рис. 1.18

Если $\alpha_1 \neq \alpha$, то, выражая из (1.5) вектор $\vec{a}$, получим $\vec{a} = \dfrac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha}\vec{b}$.

По теореме 2 § 1.3 из этого следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию.

Таким образом, в обоих случаях приходим к противоречию, а значит, пара чисел α, β единственна.

2. Пусть для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет место равенство $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Фиксируем произвольную точку A и запишем это равенство в виде $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, где $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{b}$. Это означает, что направленный отрезок $\overline{AC}$ является представителем вектора $\vec{c}$, направленный отрезок $\overline{AB}$ — вектора $\alpha\vec{a}$, направленный отрезок $\overline{BC}$ — вектора $\beta\vec{b}$. Обозначим через σ плоскость, которая содержит точки A, B, C. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то плоскость σ единственная. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то таких плоскостей много и можно взять любую из них.

Утверждается, что в плоскости σ будут лежать представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Действительно, по теореме 2 § 1.3 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, а значит, представитель вектора $\vec{b}$, отложенный от точки A, будет лежать на прямой AB и, следовательно, в плоскости σ. Аналогично, представитель вектора $\vec{b}$ будет лежать на прямой BC и, следовательно, в плоскости σ. Тогда по определению компланарных векторов векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. На рис. 1.19 изображен один из возможных случаев расположения точек A, B, C. ■

Теорема 4. *Пусть даны произвольные некомпланарные векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *из* V^3 *и произвольный вектор* $\vec{d}$ *из* V^3. *Тогда существует единственная тройка вещественных чисел* α, β, γ, *такая, что* $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

□ Докажем существование чисел α, β, γ.

Возьмем точку O и отложим от нее представители $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 1.20). Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не ком-

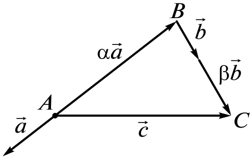

Рис. 1.19

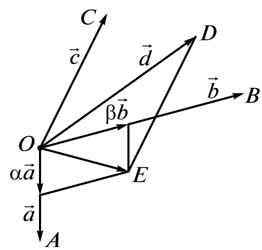

Рис. 1.20