УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЮРИСПРУДЕНЦИИ

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ЮРИДИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Под редакцией заслуженного юриста России,
профессора С. Я. Казанцева

*Рекомендовано
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности «Юриспруденция»
(ЕН.Ф.02 «Информатика и математика»)*

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2011

УДК 51:34(075.8)
ББК 22.1:67я73
В937

Высшая математика и ее приложения к юриспруденции

Рецензенты:

канд. юр. наук *Р. З. Матиев* (доцент кафедры криминалистики Московского университета Министерства внутренних дел РФ);

канд. физ.-мат. наук *Г. Е. Корчагин* (старший преподаватель кафедры информатики и математики Казанского юридического института Министерства внутренних дел РФ)

В937 **Математика** для юридических специальностей : учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / С. Я. Казанцев, О. Э. Згадзай, Н. Х. Сафиуллин, Н. Р. Шевко ; под ред. С. Я. Казанцева. — М. : Издательский центр «Академия», 2011. — 224 с. (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к юриспруденции).

ISBN 978-5-7695-6764-3

Учебное пособие содержит систематическое изложение математики, соответствующее Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования второго поколения, и учитывает особенности подготовки юристов, бакалавров и специалистов.

В учебном пособии рассмотрены основные разделы математики и математические методы. Теоретический материал каждой главы сопровожден большим количеством контрольных вопросов, задач и примеров, подробным описанием решения задач, включая выполнение задач по ряду тем на персональных компьютерах. С целью приблизить изучение математики к решению практических задач включена глава по математическому моделированию. Библиография подобрана с учетом возможности получения дополнительных теоретических сведений, а также самостоятельного решения задач.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 51:34(075.8)
ББК 22.1:67я73

ISBN 978-5-7695-6764-3

ВВЕДЕНИЕ

Государственным образовательным стандартом предусмотрено изучение основ высшей математики студентами высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Юриспруденция».

Высшая математика является естественным продолжением начальных разделов математики, изученных в средней школе. Однако уровень изложения и подход к отдельным понятиям в высшей математике отличается от школьного, что вызывает у студентов трудности в освоении предмета. Данная книга, посвященная основам высшей математики, призвана обеспечить преемственность между школьным и вузовским курсами математики и повторить уже пройденные в средней школе темы, необходимые для изучения высшей математики.

Материал учебного пособия содержит сведения по основным разделам математики. Студенты должны овладеть аппаратом математики непрерывных величин, без чего невозможно приступить к изучению прикладных проблем, в том числе имеющих правовую направленность.

В учебном пособии представлены также основные разделы прикладной математики (теория вероятностей, математическая статистика, теория массового обслуживания; математическое, главным образом линейное, программирование), а также другие вопросы, полезные для будущих юристов.

В учебном пособии нашли отражение вопросы конкретного применения математических методов (комплекс задач по выявлению взаимосвязей, прогнозированию, оценке факторов риска и пр.). Такие задачи в настоящее время чаще всего решаются на персональном компьютере с привлечением соответствующих прикладных программ.

Помимо овладения современным математическим аппаратом студенты должны также уяснить методологию математического мышления. Как известно, в основе построения математической теории лежит аксиоматический метод, при котором в фундаменте теории находятся некоторые исходные постулаты, называемые аксиомами, а все остальные приложения получаются как логические следствия аксиом с помощью строгих доказательств. Но математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям — необходима еще математическая интуиция, позволяющая предвидеть нужный результат и наметить пути исследования с помощью правдоподобных рассуждений. Эти качества вырабатываются прежде всего в процессе самостоятельной работы, поэтому следует обратить особое внимание на практические примеры, а также контрольные вопросы и задания, приведенные в конце каждой главы.

Глава 1

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ. МАТЕМАТИКА И ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

1.1. Математика в современном мире

Определение предмета математики. Математика — учение об общих формах, присущих реальному бытию. Она создает теории, пригодные для самых разнообразных потребностей естествознания и техники, что позволяет применять математические методы, разработанные для решении задач одной области науки к задачам, относящимся к иным областям знания.

Известны два подхода к определению предмета математики: одно определение дано Ф. Энгельсом, другое — группой французских математиков под коллективным псевдонимом Николя Бурбаки.

Согласно Ф. Энгельсу, «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира». Данное высказывание нельзя считать полным определением математики, поскольку оно не раскрывает методы математики и цели ее изучения. Вместе с тем оно показывает, что объект исследования математики напрямую связан с реальным миром, а не является лишь порождением человеческого сознания.

Второй подход воспроизводит методологические установки Н. Бурбаки, которые определяют объекты исследования математики. Целью группы Н. Бурбаки является написание серии книг, отражающих современное состояние математики. Изложение в книгах Бурбаки ведется в строгой аксиоматической манере и предполагает замкнутое представление материала на основе теории множеств Цермело—Френкеля. На группу французских математиков огромное влияние оказали немецкие математики (Д. Гильберт, Г. Вейль, Дж. фон Нейман, особенно алгебраисты Э. Нетер, Э. Артин и Б. Л. ван дер Варден).

Новый подход к объектам исследования математики вызван «революцией в аксиоматике». Ее природа состоит в переходе от конкретной содержательной аксиоматики к аксиоматике сначала абстрактной, а затем полностью формализованной.

Формализованная аксиоматика отличается точным заданием правил вывода. Вместо содержательных рассуждений она использует язык символов и формул, в результате чего содержательные рассуждения сводятся к преобразованию одних формул в другие, т. е. к особого рода исчислениям. Таким образом одни и те же аксиомы могут описывать свойства и отношения сильно различающихся по своему конкретному содержанию объектов.

Абстрактная математическая структура. Фундаментом современной аксиоматики является понятие *абстрактной математической структуры.* Выделяют три основных типа структур:

• ***алгебраические структуры.*** На некотором множестве A задается конечное число операций с соответствующими свойствами, описываемых системой аксиом. В качестве элементов множества A могут выступать как математические объекты (числа, матрицы, перемещения, векторы), так и нематематические. Алгебраическими структурами являются *группы*, *кольца* и *поля*;

• ***структуры порядка.*** На множестве задается отношение порядка (сравнение на числовых множествах), для которого выполняются свойства *рефлективности*, *симметричности*, *транзитивности*;

• ***топологические структуры.*** Каждому элементу множества M тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из M, называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять аксиомам топологических структур. С помощью топологических структур определяются такие понятия, как «*окрестность*», «*предел*», «*непрерывность*».

Основные типы структур порождают сложные структуры, где элементы связываются с помощью объединяющей системы аксиом.

Пример 1.1. Множество вещественных чисел является сложной структурой, в которую одновременно входят три основные порождающие структуры.

Общая черта различных понятий, объединенных родовым названием «математическая структура», состоит в том, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Построить аксиоматическую теорию структуры означает вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо предположений относительно природы рассматриваемых элементов. Таким образом можно сделать следующий вывод: *в аксиоматической форме объект математики представляется скоплением абстрактных форм — математических структур.*

Следует отметить, что новый взгляд на объект математики разделяется многими учеными, которые считают, что определение, данное Ф. Энгельсом, устарело.

1.2. История развития математики

В историческом плане выделяют четыре периода развития математики: 1) зарождения математики; 2) элементарной математики; 3) математики непрерывных величин; 4) современной математики.

Период зарождения математики. Необходимость счета предметов на самых ранних ступенях развития культуры привела к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел, к возникновению сначала устных, а затем и письменных систем исчисления. Накапливающийся материал постепенно сложился в древнейшую математическую науку — арифметику. Измерение площадей, объемов, потребности строительной техники, а позднее и астрономии вызвали развитие зачатков геометрии. Особенно интенсивно накопление арифметических и геометрических знаний происходило в Египте и Вавилонии. В первой половине II тысячелетия до н. э. в Вавилонии зародились алгебра и тригонометрия.

Период элементарной математики. Начало периода следует отнести к VI—V вв. до н. э. Усилиями древнегреческих ученых были заложены основы математической науки: система изложения элементарной геометрии, теория чисел, учение о величинах и измерениях, система буквенного исчисления в алгебре. Особенно выдающийся вклад в создание науки внесли Фалес и Пифагор, Зенон и Платон, Аристотель и Гиппократ. С III в. до н. э. центром математических исследований становится Александрия, куда стекаются крупнейшие ученые — достаточно упомянуть лишь два имени, знакомые нам еще по школе: Евклид и Архимед. В своих «Началах» Евклид собрал и подверг окончательной логической переработке достижения предыдущего периода в области геометрии, а также заложил основы систематической теории чисел, доказав бесконечность ряда простых чисел и построив законченную теорию делимости.

Античным ученым было чуждо понятие непрерывности. Тонкий мыслитель Зенон (V в. до н. э.) считал, что даже на элементарный вопрос: «Где находится кончик летящей стрелы?» нельзя получить правильный ответ. И даже Пифагор, утверждавший, что «все есть число», имел в виду только натуральные числа. Архимед, вплотную подошедший к понятию бесконечно малых, что позволило ему вычислять площади криволинейных фигур, также не допускал такого понятия.

Период математики непрерывных величин. Период начинается с XVII в., когда в жизни стали большую роль играть машины и механизмы. Метафизика древнегреческих мудрецов не обеспечивала изучение законов природы в естественной динамике, в развитии. Чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, потребовался новый аппарат. На первый план было выдвинуто понятие функции, которое в дальнейшем стало играть роль самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины и числа. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей привело к возникновению основ математического анализа, вводящего в явном виде идею бесконечного, понятия предела, производной, дифференциала и интеграла.

Необходимо отметить, что XVII в. вообще был веком философов-математиков, привнесших в науку большинство идей, которые лежат в основе всей высшей математики. В начале века Дж. Непер опубликовал открытые им таблицы логарифмов, двадцать лет спустя Р. Декарт разработал основы координатного метода в геометрии, П. Ферма предложил блестящую теорему о максимуме и минимуме функций, возникает и развивается учение о рядах, представителями которых являются известные прогрессии и бином Ньютона. Однако самым выдающимся открытием века было учение о бесконечно малых величинах и построенные на их основе дифференциальное и интегральное исчисления, честь открытия которых принадлежит И. Ньютону и Г. Лейбницу. Непримиримые спорщики и враги, они в острых диспутах и ссорах создали по существу новую математику, хотя и шли к ней разными путями. Разработанный ими аппарат позволил записать основные законы механики и физики в виде дифференциальных уравнений и предложить идеи их решения.

Общий стиль математических исследований изменился в XVIII в. Предложенные ранее идеи нуждались в более строгом обосновании, что потребовало усовершенствовать сам математический аппарат. Пожалуй, самыми блестящими представителями нового поколения математиков явились Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж. К своим гениальным задаткам (Эйлер в 23 года — профессор Петербургской академии наук, Лагранж в 19 лет — профессор университета в Турине) они прибавили исключительное трудолюбие и оставили после себя огромное творческое наследие. Список научных трудов Эйлера, например, содержит свыше 850 наименований. Он положил начало функциям комплексного переменного, вариационному исчислению, теории дифференциальных уравнений, приближенным вычислениям и многим другим разделам математики. Лагранж заложил фундаментальные основы аналитической механики, ему принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа (формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов), теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям. В этот же период творили блестящие математики Ж. Д'Аламбер, А. Лежандр, Г. Крамер, П. Лаплас. Их усилиями математика превратилась в самостоятельную отрасль науки.

Период современной математики. Период начинается с XIX в. Накопленный ранее материал привел к необходимости его логического анализа с новых точек зрения и обобщения. Развитие функций комплексного переменного явилось логическим следствием представления числа в самом общем виде; традиционная геометрия Евклида представилась в виде частного случая геометрии Лобачевского. Возникшие отрасли техники — термодинамика, магнетизм, электричество — потребовали соответствующего математического аппарата, появились многочисленные отрасли прикладной математики. Началась ревизия казавшихся незыблемыми основ, что привело к новым геометрическим системам, новым алгебрам и новым числам.

Расширяются области приложения математического анализа. В качестве основного аппарата математической физики выдвигаются теория дифференциальных уравнений с частными производными и теория потенциала. В этом направлении усиленно работают выдающиеся математики: К. Ф. Гаусс, Ж. Б. Ж. Фурье, С. Д. Пуассон, О. Л. Коши, П. Г. Л. Дирихле, М. В. Остроградский. Из уравнений математической физики стараниями Стокса и других английских математиков возникает векторный анализ, быстро развивается теория вероятностей. П. С. Лаплас, С. Д. Пуассон создают новый мощный аналитический аппарат; П. Л. Чебышёв доказывает свою знаменитую теорему больших чисел; К. Ф. Гаусс публикует доказательство основной теоремы алгебры; Э. Галуа формулирует теорию групп и с ее помощью дает окончательный ответ об условиях разрешимости алгебраических уравнений любой степени (отсюда начинается новая наука — алгебраическая теория чисел); Б. Риман и К. Т. В. Вейерштрасс заложили основы теории функций комплексного переменного, разработали ее геометрические приложения.

В дальнейшем центр тяжести алгебраических исследований переносится в новые области: теория групп, полей, колец. Многие из этих отраслей алгебры получают глубокие применения в естествознании — кристаллографии, квантовой физике, информационных приложениях. Возникает алгебраическая и дифференциальная геометрия многомерных пространств. Ф. Клейн и Ж. А. Пуанкаре создают теорию автоморфных функций, в которой находит замечательное приложение геометрия Н. И. Лобачевского. Теория дифференциальных уравнений послужила Ж. А. Пуанкаре отправным пунктом для исследований в области топологии и привела к построению теории общих топологических пространств. Продолжают быстро развиваться методы теории вероятностей, получившие в конце века много новых применений, в частности возникает математическая статистика. Особая заслуга в развитии вероятностных методов принадлежит русской школе (П. Л. Чебышёв, А. А. Марков, А. М. Ляпунов). В самостоятельную ветвь математики оформились численные методы приближенных вычислений.

В XX в. математические методы проникают в различные области науки, возникает целый ряд новых дисциплин: теория алгоритмов, теория информации, теория игр, исследование операций, математическое программирование, комбинаторный анализ, математическая теория оптимального управления, теория массового обслуживания, теория графов и др. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования, средством предельно четкой формулировки понятий и проблем.

Подход к объектам математического исследования с позиций *абстрактных математических структур* обусловлен четвертым, современным, периодом в развитии математики. Состояние математики, сложившееся к настоящему времени, имеет следующие особенности:

1) связь математики с естествознанием приобретает все более сложные формы. Новые теории возникают не только в результате

непосредственных запросов практики, естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой математики. Наиболее важные из них: развитие теории функций, теории групп, связанной с исследованием проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, создание неэвклидовых геометрий;

2) значительно расширились области приложений математики. Ее результаты находят применение в электродинамике, теории магнетизма, термодинамике. Резко возросли потребности в математике таких наук, как биология и химия, а также гуманитарных наук — социологии, юриспруденции и др.;

3) возникла необходимость критического пересмотра исходных положений (аксиом) математики, построения строгой системы определений и доказательств, а также уточнения логических приемов, употребляемых при этих доказательствах. Расширение области исследования математики сопровождается возрастанием абстрактности ее понятий и теорий.

Сущность *метода математических структур* состоит в том, что все объекты исследования, достигшие уровня зрелости, достаточного для оформления в теорию, прибегают к аксиоматическому методу, а через него, хотя и косвенно, — к математике. Изложенное можно пояснить следующим образом:

• строится абстрактная теория;

• терминам абстрактной теории приписывается содержательный смысл;

• система, полученная путем приписывания содержательного смысла абстрактной теории, называется *моделью*, или *интерпретацией*, этой теории.

Качественные изменения, происшедшие в математике, дают возможность исследовать количественные отношения глубже и шире. А. Н. Колмогоров приходит к выводу о том, что круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» определение математики как науки о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира применимо и на современном этапе ее развития.

Математика была и остается «инструментом» познания мира, его пространственных форм и количественных отношений. В настоящее время этот «инструмент» проникает в изучение все более сложных процессов и явлений, в том числе и неметрической природы. Без осознания этого фундаментального философского, методологического положения не может быть сформировано целостное представление об общей картине мира.

Математика претендует на статус «особой» науки, изначально превышающей все другие науки по уровню точности, истинности и непротиворечивости своих фундаментальных положений. В сфере *конечных величин* математика действительно относительно точна и непротиворечива; этого достаточно для более или менее адекватного количественного моделирования самых различных конечных по размерности предметных областей. Что же касается сферы бесконечного, то здесь у современной математики имеются противоречия, которые могут быть преодолены лишь совместными усилиями математиков, философов и логиков.

1.3. Язык математики

Математический язык. Математика подобно любой другой науке многомерна. На когнитивном уровне она выступает как мышление, на перцептуальном — как чувствование, на лингвистическом — как язык. Лингвистическое измерение математики — ее язык — заслуживает отдельного рассмотрения. Дело в том, что лишь благодаря ему математике придается особый, интерсубъективный, общезначимый для всех людей характер. Мышление и чувствование всегда сугубо индивидуально, в то время как язык является достоянием всех.

Как известно, язык — это система условных знаков, принятых в некотором сообществе, обеспечивающая коммуникацию его членов. Математический язык удовлетворяет этому определению. Подобно любому языку он состоит из совокупности высказываний (предложений). Особенность математического языка заключается в том, что в нем широко используются математические символы, объединенные в формулы и уравнения. С учетом этого обстоятельства часто говорят, что *язык математики — это язык формул.*

Однако язык математики не сводится к формулам и символьным выражениям. В математических доказательствах используются слова и обороты речи из естественных языков, например: «предположим, что...», «будем исходить из...», «алгебра — это наука о...» и т. п. Вместе с тем в контексте математики словам и оборотам из повседневной речи придается особое значение, которое соотносится со смыслом формализованных утверждений и понятий.

Математический язык — *это язык описания математических структур.* В одних случаях речь идет непосредственно об этих структурах, в других — на их основе решаются те или иные конкретные математические задачи.

Язык математики часто сравнивают с ***естественным языком.*** При этом, как правило, в восторженных тонах дается характеристика одного из них. Следует учитывать, что речь идет о *различных* языках. В случае математических структур для их описания необходим язык математики; на его фоне естественный язык громоздок и двусмыслен.

В рядовых ситуациях естественный язык часто имеет преимущества перед математическим языком: при повседневном общении можно обойтись без детальных знаний о математических структурах. Именно поэтому естественный язык не нуждается в его замене математическим языком. Важно другое — не усвоивший язык математики упускает возможность в дальнейшем успешно двигаться по пути своего личного развития. Причина кроется в том, что в практических ситуациях, связанных с анализом и планированием той или иной деятельности, приходится переходить с естественного языка на язык математики и обратно.

Математические модели. Междисциплинарные функции математики также связаны с многочисленными языковыми переходами. Пока исследователь находится в пределах чистой математики, он может обходиться математическим языком. Ситуация изменяется кардинальным образом, когда в целях детального изучения проблемы строятся ***математические модели*** тех или иных явлений (физических, биологических, социальных, правовых и т. д.).

Математические модели строятся с использованием понятийного аппарата конкретной предметной области, т. е. определяются предметом той или иной конкретной науки. Необходимость применения математических моделей переводит математику в ***прикладную математику***. Например, рассматривая вопросы решения алгебраических уравнений, мы пользуемся языком алгебры. В случае обсуждения свойств таких объектов правовой статистики, как статистическая совокупность преступлений, мы употребляем уже язык статистики, а не математики. Если речь заходит об алгебраической модели преступности, то приходится устанавливать соответствие между алгеброй и правовой статистикой и одновременно применять два языка — математический и статистический.

Таким образом, в математике используется математический язык; в конкретной науке — язык данной науки (в физике — язык физики, в экономике — язык экономики, в праве — язык права); в прикладной математике, т. е. в случае построения математических моделей конкретной предметной области, — оба языка: математический и конкретной науки.

Принципы построения языка математики. На каких же принципах строится математический язык? Во-первых, это абстрактный язык (в противоположность конкретным языкам, где каждое слово имеет конкретное значение). Во-вторых, язык математических формул и знаков обладает большой универсальностью и используется во всех сферах человеческой деятельности (система математических знаков вырабатывалась на протяжении тысячелетий). В-третьих, математический язык — результат совершенствования естественного языка по ряду направлений: устранение громоздкости и двусмысленности, расширение выразительных возможностей (язык математики употребляется как средство выражения математической мысли).

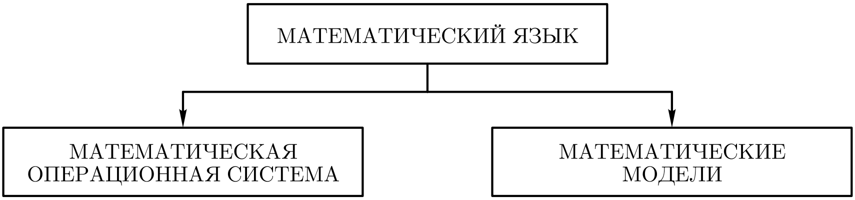

Рис. 1.1. Структура математического языка

Язык в широком смысле — это лексика, тезаурус, орфография, грамматика, семантика языка, на котором написаны рассказы, пьесы, романы и другие произведения. Что же в математическом языке выступает аналогом лексики и грамматики, а что — произведений? Аналог лексики и грамматики — математическая операционная система, а произведений (рассказов, пьес) — математические модели (рис. 1.1).

Овладение математическим языком предполагает сознательное усвоение содержания математических понятий, отношений между ними (аксиом, теорем) и умение рационально и грамотно выразить математическую мысль в устной и письменной формах с помощью средств математического языка, а также свободное оперирование математическими знаниями, умениями и навыками на практике.

Овладение математическим языком формирует навыки рационального выражения мысли: последовательность, точность, ясность, лаконичность, выразительность, экономность, информированность. Сознательное и свободное владение математическим языком является обязательным условием и средством овладения математической культурой.

К *недостаткам математического языка* относят специфичность и ограниченную возможность отображения действительности. К *достоинствам* — возможность выражения мыслительных операций в рациональном (сокращенном и свернутом) виде с помощью символов и то, что математический язык отличается большой прогностической силой.

Операционные системы. Множество абстрактных объектов и действий с ними образует то, что можно назвать ***операционной системой*** математики: *объекты* — это числа, векторы, функции, матрицы и т. д.; *действия* (операции) — сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование и т. д. (рис. 1.2).

У операционной системы есть четкие внутренние побудительные мотивы развития и цели: это расширение и выполнимость операций, охват всего, что мы хотим описать. Проиллюстрируем эти мотивы на примере истории становления и развития математической операционной системы. При этом будем придерживаться не хронологии событий, а логики их следования[1].

[1] *Грес П. В.* Математика для гуманитариев: учеб. пособие. — М.: Юрайт, 2000. — 112 с.

Все начиналось с целых чисел. Затем возникли действия с ними: сложение и обратное действие — вычитание; умножение и деление. Невыполнимость деления была преодолена введением дробных чисел, вычитания — отрицательных чисел.

Действительные числа — камень преткновения древних греков — получили обоснование, удовлетворившее математиков, только в вопросах сечений рациональных чисел Дедекинда и сходящихся последовательностей Вейерштрасса. Так пришли к действительным числам, с которыми выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения предела, которые обозначаются соответственно знаками «+», «−», «×», «:», «lim» (исключения с делением на нуль и пределом неограниченно возрастающей последовательности не в счет: нет правил без исключения, хотя их и научились избегать в так называемом нетрадиционном математическом анализе).

После действительных чисел появились комплексные — как замыкание операции решения квадратных уравнений. С их введением любое алгебраическое уравнение стало разрешимым. Затем У. Р. Гамильтон построил систему чисел — кватернионов как расширение комплексных чисел. Они не привились, но их частный случай — векторы и действия с ними (сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения) вошли в широкий обиход математики.

Потребность в описании эволюционных процессов изменения привела к появлению переменных величин, а затем и функций, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений.

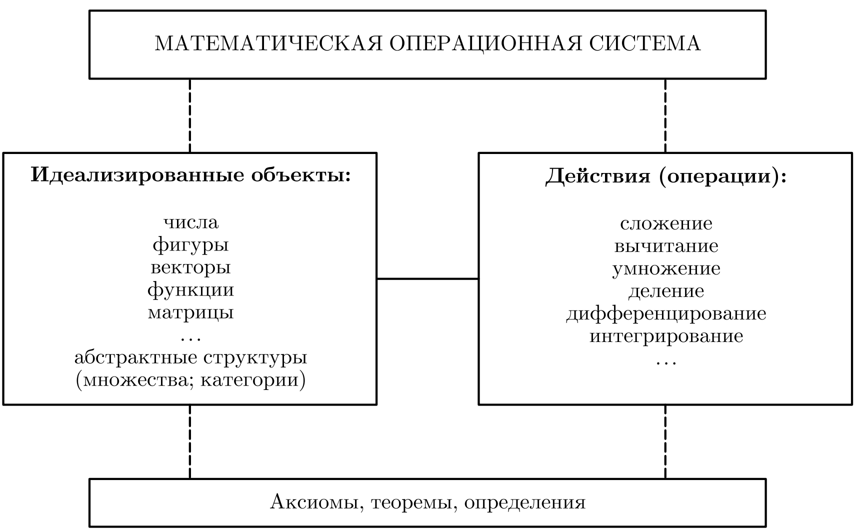

Рис. 1.2. Структура математической операционной системы

Возникли множества и действия с ними (объединение, пересечение, дополнение, произведение) и многое-многое другое.

Как общий прием расширения операционной системы, помимо отмеченного уже расширения для выполнимости операций, можно указать перевод функций как операций в элементы, операций над функциями-элементами опять в элементы, с которыми, в свою очередь, также можно производить операции. Так операционная система пополнилась современным функциональным анализом и теорией операторов, причем операционная система обрела, исходя из своих внутренних законов развития, теорию линейных операторов раньше, чем она потребовалась физике для описания явлений микромира.

Помимо принципиальной выполнимости операций, огромное значение имеет фактическая выполнимость, простота и доступность этой выполнимости. Так, древние греки с трудом вычисляли произведение только потому, что, например, числа 473 и 328 записывали в виде CDLXXIII и CCCXXVIII[1].

Английский физик О. Хевисайд, не признанный его современниками, сделал операцию интегрирования легко выполнимой и сводимой к делению на комплексное число. Это позволило ему решить очень много задач, не решенных ранее. Хевисайд был великим ученым: предсказал наличие в верхних слоях атмосферы ионизированного слоя, отражающего радиоволны; подсчитал излучение движущегося электрона; открыл формулу, известную в науке как знаменитая формула Эйнштейна.

Современные компьютерные технологии, методы вычислений и программирования в рассматриваемом контексте следует признать как новые, эффективные средства реализации трудных и повторяющихся операций математической операционной системы.

1.4. Математика в современном мире и гуманитарных науках

Роль математики в общечеловеческой культуре. Обращаясь к истории философии, следует отметить, что ученые, создававшие математику нового времени, рассматривали математическую науку как составную часть философии, которая служила средством познания мира (рис. 1.3).

Место математики в жизни и науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на чисто качественных (а значит, приблизительных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. Неслучайно говорят,

[1] *Грес П. В.* Математика для гуманитариев: учеб. пособие. — М.: Юрайт, 2000. — 112 с.

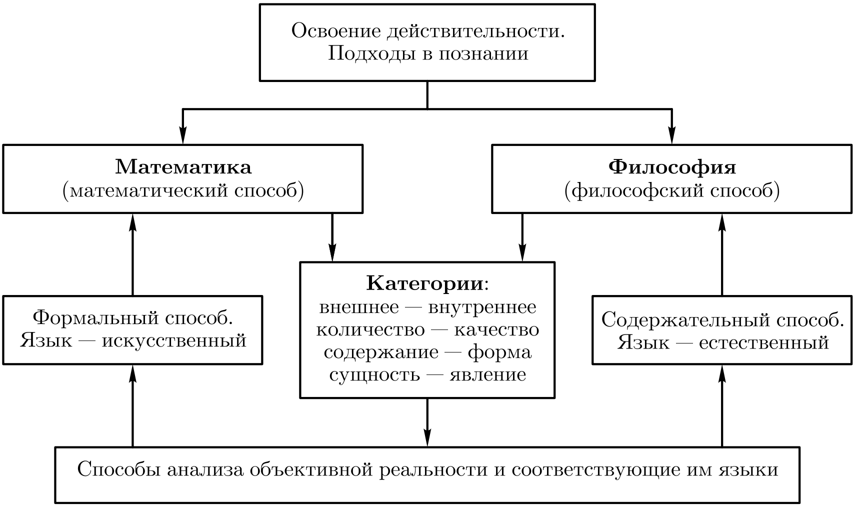

Рис. 1.3. Способы познания действительности

что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика.

Математика является частью общечеловеческой культуры. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов, что привело около двух с половиной тысяч лет назад к возникновению математики как науки. Квадривиум, изучавшийся в Древней Греции, включал арифметику, геометрию, астрономию и музыку. О значении математики для человечества свидетельствует тот факт, что книга «Начала» Евклида издавалась наибольшее число раз (не считая Библии).

Математика способствует выработке научного мировоззрения и достижению необходимого общекультурного уровня. История зарождения великих математических идей, судьбы выдающихся математиков (Архимед, Э. Галуа, Б. Паскаль, Г. Галилей, К. Ф. Гаусс, Л. Эйлер, С. В. Ковалевская, П. Л. Чебышёв и др.) дают пищу для ума и сердца, а примеры беззаветного служения науке приводят к философским размышлениям и нравственным поискам.

Математические рассуждения позволяют научиться правильно устанавливать причинно-следственные связи между фактами, событиями и явлениями, что, безусловно, должен уметь делать каждый образованный человек. Стиль изложения математики, ее язык влияет на разговорную, повседневную речь. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие, и уметь правильно их использовать. Здесь имеются в виду именно основные понятия и идеи, а не набор конкретных формул и теорем.

Человек, знающий математику лишь в рамках школьного курса, вряд ли осознает, сколь малое количество *предельно необходимых знаний*, накопленных задолго до начала XX в., сообщается в школьном курсе математики. А ведь в современном мире ежемесячно выходят сотни математических журналов, в которых публикуются тысячи новых теорем с трудными, порой многостраничными доказательствами. И это не считая публикаций по приложениям математики. Следует отметить тесную взаимосвязь между расширением фронта математических исследований, усилением активности и изменением представлений математиков о предмете своей науки, хотя полного единодушия во взглядах по этим вопросам между учеными нет.

В настоящее время стали привычными такие словосочетания, как «математическая лингвистика», «математическая биология», «математическая экономика» и т. п. Какую дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к ее наименованию эпитета «математический». Математика занимает сегодня видное место в жизни общества.

Тем не менее повсеместный триумф математики некоторым кажется загадочным и даже подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, например, физики или химии. Физика открывает нам новые источники энергии, новые средства быстрой связи. Химия создает искусственные ткани, а сейчас пытается создать искусственную пищу. Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках энергии, связи, одежды и еды, прочно вошли в нашу жизнь.

А что же дает математика, которая не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия? Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости и начало нового этапа развития?

Еще не так давно ответ на эти вопросы заключался в том, что математика давала возможность точно вычислять и тем самым осуществлять математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики, особенно в последние годы, и в связи с бурным развитием вычислительной техники, не он оказывается главным при попытке объяснить причины математизации большинства аспектов современной жизни — науки, технологии и т. п.

Главная причина этого явления такова: математика предлагает весьма общие и достаточно четкие логические модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Свои модели математика создает с помощью своего особого языка — языка чисел, различных символов. Объектами исследования математики служат логические модели, построенные для описания явлений в природе, технике, обществе. *Математической моделью* изучаемого объекта (явления, процесса и т. п.) называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. При этом математическая модель, отображая и воспроизводя те или иные стороны рассматриваемого объекта, способна замещать его так, что исследование модели дает новую информацию об объекте, опирающуюся на принципы математической теории, сформулированные математическим языком законы природы. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и не обнаруженные ранее закономерности, проводить математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, возникающих при исследовании этого явления.

Нужна ли математика гуманитарию вообще и юристу в частности? Известно, что математика является частью общечеловеческой культуры, такой же неотъемлемой и важной, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все лучшие достижения человеческой мысли, человеческих рук и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Исходя из этого, для студента-гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина*, как, например, право для студента-математика.

Но значение математики этим не исчерпывается. Напомним слова М. В. Ломоносова: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Математика влияет на упорядочение ума общностью и абстрактностью своих конструкций. Математика полна всякого рода правил, общих, строго определенных методов решения различных классов однотипных задач. Решая любую задачу, человек должен строго следовать точному предписанию (алгоритму) о том, какие действия и в каком порядке надо выполнить. Нередко изучающему математику приходится составлять подобные предписания, т. е. находить алгоритм.

Можно утверждать, что математика учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их исполнять (не последнее качество, необходимое, например, любому юристу). В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — *выявить истину.* Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому, занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое *профессиональное мышление.*

Кроме того, использование математических методов расширяет возможности каждого специалиста. Существенную роль играют статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала.

Мы живем в век математики. С начала XX в. она активно проникает во все области человеческих знаний, подтверждая слова К. Маркса: «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». В настоящий момент одни науки уже безоговорочно приняли математику на вооружение, другие только начали ее применять. Гуманитарии, например, относятся к последним. Среди них немало еще сомневающихся в перспективности использования математических методов. Однако в настоящее время бóльшая их часть спорит уже не о том, «нужно ли применять», а о том — «где и как лучше применять».

Математика — это феномен общемировой культуры, в ней отражена история развития человеческой мысли. Математика, с ее строгостью и точностью, формирует личность, предоставляет в ее распоряжение важнейшие ресурсы, столь необходимые для обеспечения наилучшего будущего.

Итак, математическое образование важно с различных точек зрения:

• *логической* — изучение математики является источником и средством активного интеллектуального развития человека, его умственных способностей;

• *познавательной* — с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные и количественные отношения;

• *прикладной* — математика является той базой, которая обеспечивает готовность человека как к овладению смежными дисциплинами, так и многими профессиями, делает для него доступным непрерывное образование и самообразование;

• *исторической* — на примерах из истории развития математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;

• *философской* — математика помогает осмыслить мир, в котором мы живем, сформировать у человека развивающиеся научные представления о реальном физическом пространстве.

Контрольные вопросы

1. Приведите два-три распространенных в литературе определения понятия «математика».

2. Какие аксиомы и постулаты привел Евклид в своих «Началах» (III в. до н. э.)?

3. Перечислите основные этапы становления современной математики.

4. В чем состоят достоинства и недостатки математического языка?

5. В чем особенность математической индукции?

6. В чем заключается сущность аксиоматического метода?

7. Назовите основные этапы развития математики.

8. В чем заключается основная роль математики в современном мире?

9. Какое значение, по вашему мнению, имеет применение математики в юриспруденции?

10. Приведите примеры успешного использования математики в правовых исследованиях.

11. Найдите общие черты и различия между математическими и правовыми закономерностями.

12. Приведите примеры использования индуктивного метода в юриспруденции.

13. Приведите примеры употребления понятия функциональной зависимости в праве.

14. Приведите примеры использования понятий дифференцирования и интегрирования в правовых исследованиях.

15. Какая отрасль математики, по вашему мнению, играет наибольшую роль в праве в настоящее время? Обоснуйте свой вывод.