Высшее профессиональное образование
БАКАЛАВРИАТ

В. В. БАБАНОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В ДВУХ ТОМАХ

Том 2

Учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Строительство»

2-е издание, стереотипное

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2012

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.11я73
Б121

Р е ц е н з е н т ы:
проф. кафедры теоретической и строительной механики Санкт-Петербургской государственной лесотехнической академии, д-р техн. наук *В. С. Постоев*;
научный руководитель, проф. ЗАО «Научно-производственная организация “Геореконструкция — Фундаментпроект”», д-р техн. наук *В. М. Улицкий*

Бабанов В.В.
Б121 Строительная механика. В 2 т. Т. 2 : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / В. В. Бабанов. — 2-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 288 с. — (Сер. Бакалавриат).
ISBN 978-5-7695-9299-7

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению бакалавриата «Строительство».
В учебнике изложены основы расчета статистически неопределимых систем методом перемещений и смешанным методом на действие неподвижных и подвижных нагрузок. Для расчета сооружений показано использование матричного аппарата и методов конечных элементов. Теоретический материал сопровожден достаточным для практического освоения дисциплины количеством примеров. Содержится необходимый для решения задач справочный материал.
Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.11я73

ISBN 978-5-7695-9299-7 (т. 2)
ISBN 978-5-7695-9297-3

Глава 6

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

6.1. Основные положения. Степень кинематической неопределимости

Метод перемещений — это второй основной классический метод расчета статически неопределимых систем. Основными неизвестными в этом методе являются угловые и линейные смещения узлов расчетной схемы (рис. 6.1), что и определило его название. Во многих случаях метод перемещений является эффективнее метода сил.

Рассмотрим деформированное состояние статически неопределимой рамы (см. рис. 6.1) при действии внешней нагрузки.

Для упрощения расчета используются общепринятые, ранее сформулированные допущения о пренебрежении продольными деформациями в изгибаемых стержнях и о малости деформаций по сравнению с размерами сооружения. В силу этих допущений жесткие узлы рассматриваемой рамы остаются прямыми, горизонтальные смещения узлов C и D считаются одинаковыми, углы поворота жестких узлов в силу их малости определяются по тангенсу угла, сближением концов стержней при их изгибе пренебрегают (например, считают, что узлы C и D по вертикали не перемещаются).

Для того чтобы применить метод перемещений, необходимо знать степень упругой подвижности узлов расчетной схемы — *степень кинематической неопределимости*, включающей в себя число независимых угловых и линейных перемещений всех узлов:

$$n_{\text{к}} = n_{\text{у}} + n_{\text{л}}, \tag{6.1}$$

где $n_{\text{у}}$ — число жестких узлов расчетной схемы, способных к повороту при ее деформации; $n_{\text{л}}$ — степень линейной подвижности всех узлов схемы.

Применение формулы (6.1) покажем на примере рамы, изображенной на рис. 6.2, *а*. Рама имеет как полностью жесткие узлы, так и комбинированные. Число $n_{\text{у}}$ включает в себя лишь жесткие соединения стержней. Кроме того, узлами считаются места ступенчатого изменения жесткостных характеристик (узел A). Ригель BC в представленной схеме показан абсолютно жестким, т. е. не изгибаемым, поэтому узлы B и C не способны к повороту. Все жесткие узлы, способные к повороту при деформации рассматриваемой рамы, отмечены пунктиром на рис. 6.2, *б*. Таким образом, для данной рамы $n_{\text{у}} = 6$.

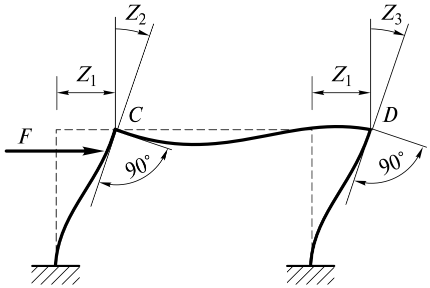

Рис. 6.1

Степень линейной подвижности можно определить как степень свободы шарнирного механизма, полученного из заданной схемы рамы путем введения сквозных шарниров во все ее узлы, включая опорные:

$$n_л = W = 2У - (С_ф + С_{оп}). \qquad (6.2)$$

Для рассматриваемой рамы (рис. 6.2, *в*): $У = 13$, $С_ф = 14$, $С_{оп} = 8$, поэтому $n_л = 2 \cdot 13 - (14 + 8) = 4$, и степень кинематической неопределимости $n_к = n_у + n_л = 6 + 4 = 10$.

В случае простых схем (см. рис. 6.1) число линейных смещений узлов определяется непосредственно из анализа возможной схемы деформированного состояния, и использование формулы (6.2) необязательно.

В отличие от метода сил, рассмотренного в гл. 5, основную систему метода перемещений получают не удалением, а введением дополнительных связей. Дополнительные связи вводятся по направлению возможных смещений узлов расчетной схемы как угловых, так и линейных. В результате все узлы расчетной схемы становятся неподвижными.

Основная система, получаемая введением дополнительных связей по направлению возможных смещений узлов, называется *кинематически определимой*.

В качестве дополнительных применяются жесткие линейные связи, устраняющие линейные перемещения узлов, и «плавающие заделки», устраняющие повороты узлов. Термин «плавающая заделка» означает, что данная заделка может иметь линейные смещения, т. е. свободно перемещаться вместе с узлом, но не может поворачиваться до тех пор, пока ей не будет принудительно сообщен поворот. В соответствии с изложенным в качестве неизвестных принимаются линейные смещения и углы поворота по направлению введенных дополнительных связей.

Для рамы, приведенной на рис. 6.2, *а*, основная система показана на рис. 6.2, *г*.

В отличие от основной системы метода сил кинематически определимая основная система единственная, т. е. в ней может меняться

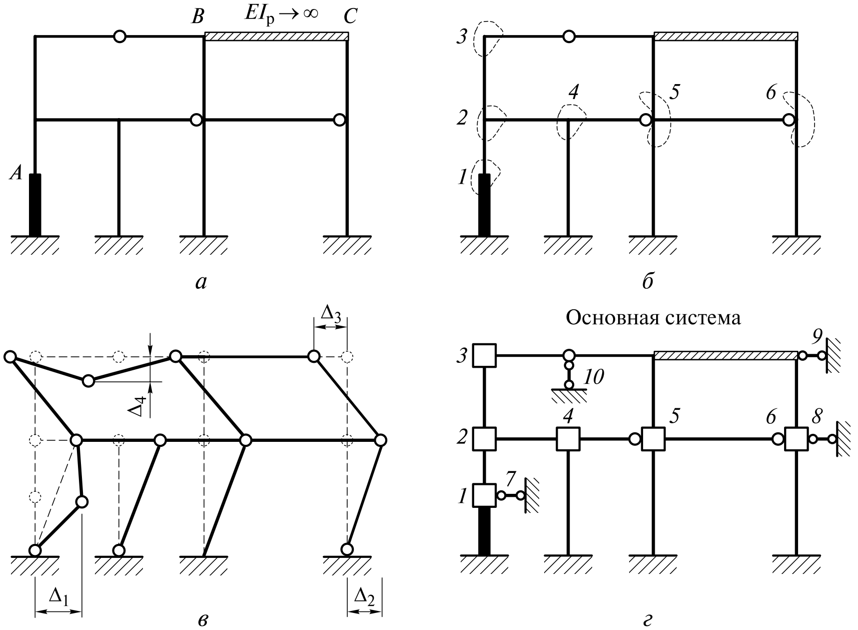

Рис. 6.2

лишь место установки какой-либо линейной связи. Например, дополнительная горизонтальная связь *8* на рис. 6.2, *г* может быть установлена в любом из узлов первого этажа рамы.

В результате введения дополнительных связей расчетная схема превращается в набор отдельных прямолинейных стержней постоянного сечения двух типов (рис. 6.3). Эти стержни являются простыми статически неопределимыми однопролетными балками, которые могут быть рассчитаны от любого воздействия методом сил. Результаты таких расчетов в общем виде обычно сводятся в специальные таблицы, называемые таблицами реакций (см. Приложения 1 и 2). В таблице Приложения 1 все значения реакций выражены через отношение жесткости стержня при изгибе к его длине ($i = EI/l$), называемое *относительной жесткостью стержня*.

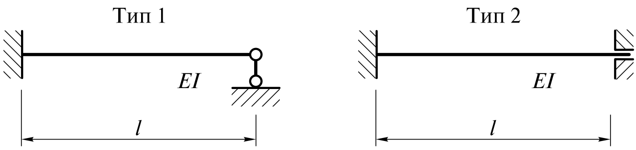

Рис. 6.3

6.2. Идея метода перемещений. Система канонических уравнений

Для описания идеи метода рассмотрим простейшую расчетную схему — двухпролетную одноэтажную несвободную раму, т. е. раму, не имеющую линейных смещений узлов (рис. 6.4, *а*). Рама загружена произвольной нагрузкой и является дважды кинематически неопределимой.

Предположим, что узлы A и B при деформации рамы под нагрузкой будут поворачиваться на углы Z_1 и Z_2.

Введем дополнительные угловые связи в узлы A и B (рис. 6.4, *б*). Полученная схема является кинематически определимой и называется *основной системой метода перемещений*.

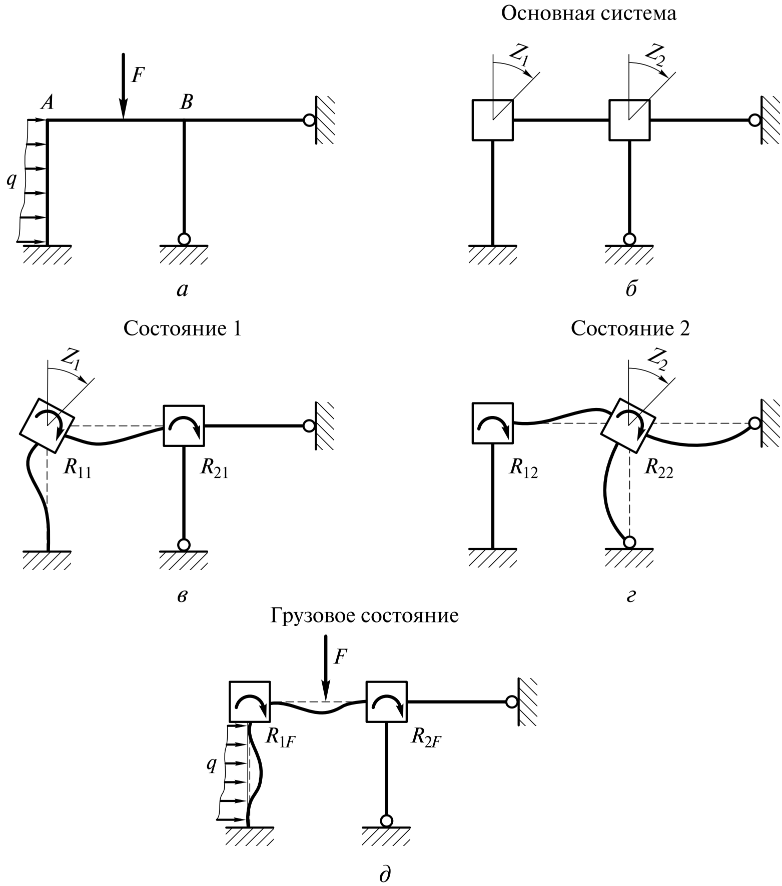

Рис. 6.4

Для полученной основной системы воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим следующие воздействия: принудительный поворот первой связи на угол Z_1 — состояние 1 (рис. 6.4, *в*); принудительный поворот второй связи на угол Z_2 — состояние 2 (рис. 6.4, *г*); действие внешней нагрузки — состояние F (рис. 6.4, *д*).

Во всех перечисленных состояниях в связях, введенных в узлы A и B, появятся реакции, которые будем считать положительными, если их направление совпадает с направление принудительного смещения связи.

Сумма реакций по каждому из указанных направлений даст полные реакции во введенных дополнительных связях:

$$R_A = R_{11} + R_{12} + R_{1F};$$
$$R_B = R_{21} + R_{22} + R_{2F}.$$

Чтобы основная система соответствовала по своим статическим свойствам заданной расчетной схеме, необходимо выполнения условий:

$$R_A = 0; \ R_B = 0,$$

или

$$\begin{aligned} R_{11} + R_{12} + R_{1F} = 0;\\ R_{21} + R_{22} + R_{2F} = 0. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Для выражения перемещений, входящих в формулы (6.3), воспользуемся зависимостью (4.20) и запишем

$$R_{11} = r_{11}Z_1; \ R_{12} = r_{12}Z_2; \ R_{21} = r_{21}Z_1; \ R_{22} = r_{22}Z_2.$$

Подставив эти выражения в формулы (6.3), получим систему

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0;\\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0, \end{aligned} \qquad (6.4)$$

называемую *системой канонических уравнений метода перемещений*.

Как и система (6.3), система канонических уравнений метода перемещений имеет следующий статический смысл: *сумма реакций в дополнительных связях от смещения этих связей и внешнего воздействия равна нулю*.

Приведенный вывод системы канонических уравнений справедлив для любой расчетной схемы с любой степенью кинематической неопределимости. Поэтому если степень кинематической неопределимости $n_к = n$, то система канонических уравнений будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1i}Z_i + \ldots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0;\\
&r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2i}Z_i + \ldots + r_{2n}Z_n + R_{2F} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \ldots + r_{ii}Z_i + \ldots + r_{in}Z_n + R_{iF} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \ldots + r_{ni}Z_i + \ldots + r_{nn}Z_n + R_{nF} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

В системе канонических уравнений (6.5) коэффициенты при неизвестных с одинаковыми индексами называются *главными коэффициентами* и всегда положительны $r_{ii} > 0$. Остальные коэффициенты называются *побочными*, и для них выполняется теорема о взаимности возможных реакций $r_{ik} = r_{ki}$.

Размерности коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы канонических уравнений легко определяются на основании их статического смысла, сформулированного ранее.

Для рамы, использованной при выводе системы канонических уравнений (см. рис. 6.4, *а*), неизвестными метода перемещений будут углы поворота (единица измерения — рад), а реакциями в угловых связях (защемлениях) по направлению углов — пары сил (единица измерения — кН·м). Следовательно, размерность свободных членов системы уравнений, являющиеся реакциями от действующей нагрузки, — кН·м, а всех коэффициентов при неизвестных — кН·м/рад.

Если основная система метода перемещений получена введением угловых и линейных дополнительных связей (рис. 6.5), рассуждая аналогично, получим следующее.

В направлении первого неизвестного отрицается сумма реакций в угловой связи, единица измерения которых — кН·м. Так как единица измерения Z_1 — рад, а Z_2 — м, то единицами измерения коэффициентов при неизвестных первого уравнения будут: для r_{11} — кН·м/рад, для r_{12} — кН, а для свободного члена R_{1F} — кН·м.

Аналогично, второе уравнение отрицает в направлении второго неизвестного сумму линейных реакций, единица измерения которых — кН. Следовательно, для второго уравнения единицами изме-

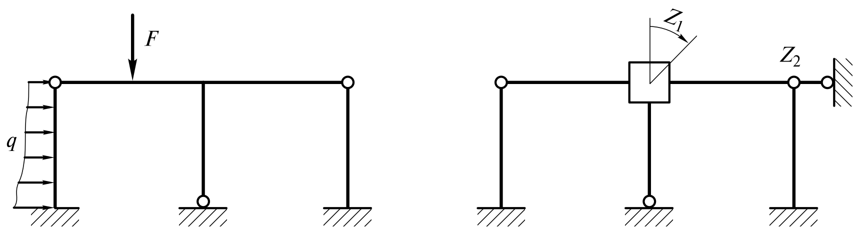

Рис. 6.5

рения коэффициентов при неизвестных будут: для r_{21} — кН/рад, для r_{22} — кН/м, а для R_{2F} — кН.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений метода перемещений при расчете ортогональных рам, как правило, определяются следующим образом:

• реакции в угловых связях — из условия равновесия узла, в который введена дополнительная связь;

• реакции в линейных связях — способом сечений, которые проводят параллельно оси связи через все стержни схемы, деформируемые при принудительном смещении этой связи.

Существуют также аналитические способы определения реакций в связях, применяемые при машинном счете. В подразд. 4.4.2. была доказана теорема о взаимности возможных реакций (4.23). Если при этом возможную работу внешних сил заменить численно равной ей возможной работой внутренних сил, пренебрегая продольными и поперечными деформациями при изгибе, то получим

$$r_{ik} = r_{ki} = \sum \int \frac{M_i^0 M_k^0}{EI} \mathrm{d}x, \tag{6.6}$$

где m — число участков интегрирования; M_i^0 и M_k^0 — эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных смещений дополнительных связей.

Для определения свободных членов системы канонических уравнений рассмотрим два состояния основной системы: грузовое F и одно из вспомогательных — от единичного смещения связи i. На основании теоремы о взаимности возможных работ (4.19) $T_{iF} = T_{Fi}$. Но работа внешних сил состояния i на перемещениях грузового состояния $T_{Fi} = 0$, следовательно, можем записать, что работа сил грузового состояния на задаваемых перемещениях состояния i:

$$T_{iF} = R_{iF} \cdot 1 + \sum_{j=1}^{n} F_j \delta_j = 0,$$

откуда

$$R_{iF} = \sum_{j=1}^{n} F_j \delta_j, \tag{6.7}$$

где R_{iF} — реакция в дополнительной связи i от внешней нагрузки; n — число нагрузок в грузовом состоянии; δ_j — перемещения во вспомогательном состоянии по направлению действующих нагрузок.

Как будет показано далее (см. подразд. 6.9, выражение (6.56)), при определении перемещений одно из состояний может быть выбрано в любой статически определимой основной системе. Поэтому работу внешних сил в формуле (6.7) на основании выражения (4.19) заменим работой численно ей равной работой внутренних сил:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j \delta_j = \sum_m \int_0^l \frac{M_i^0 \bar{M}_F^0}{EI} \mathrm{d}x,$$

где $\bar{M}_F^0$ — эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в любой наиболее простой статически определимой основной системе.

Тогда по условию (6.7) получим

$$R_{iF} = -\sum_m \int_0^l \frac{M_i^0 \bar{M}_F^0}{EI} \mathrm{d}x. \qquad (6.8)$$

6.3. Последовательность расчета при действии внешней нагрузки

При расчете действий внешней нагрузки необходимо соблюдать следующий порядок.

1. Определение степени кинематической неопределимости расчетной схемы $n_к = n_у + n_л$.
2. Составление системы канонических уравнений в общем виде.
3. Получение основной системы метода перемещений путем введения дополнительных связей по направлению возможных смещений узлов расчетной схемы.
4. Получение деформированных схем и определение усилий в основной системе (построение эпюр M_i^0) от последовательного принудительного смещения дополнительных связей ($i = 1 \ldots n = n_к$) с использованием Приложения 1.
5. Определение усилий в основной системе (построение эпюры M_F^0) с использованием Приложения 2.
6. Определение коэффициентов при неизвестных r_{ik} и свободных членов R_{iF} системы канонических уравнений.
7. Запись системы канонических уравнений метода перемещений в численном виде и определение неизвестных Z_i из ее решения.
8. Определение усилий в заданной расчетной схеме на основании принципа независимости действия сил:

$$M_F = M_1^0 Z_1 + M_2^0 Z_2 + \ldots + M_n^0 Z_n + M_F^0 = \sum_{i=1}^{n} M_i^0 Z_i + M_F^0. \qquad (6.9)$$

9. Первая статическая проверка расчета, целью которой является проверка равновесия жестких узлов расчетной схемы по значениям изгибающих моментов, полученных по эпюре M_F (см. формулу (4.6)). При правильном расчете для каждого жесткого узла должно выполняться условие $\sum M_{узл} = 0$.
10. Деформационная проверка расчета. Для ее проведения выбирается любая основная статически определимая система, в которой от последовательного приложения единичных сил строятся эпюры

$\bar{M}_i^0$ (при $i = 1...n = n_c$) и их сумма $\bar{M}_s^0$. При правильном расчете должны выполняться условия:

$$\sum_m \int_0^l \frac{\bar{M}_i^0 M_F}{EI} \mathrm{d}x = 0, \text{ или } \sum_m \int_0^l \frac{\bar{M}_s^0 M_F}{EI} \mathrm{d}x = 0.$$

11. Построение эпюры поперечных сил Q_F на основании дифференциальной зависимости $Q = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$ с использованием формул (5.11) и (5.12).

12. Определение продольных сил в стержнях расчетной схемы из условия равновесия ее узлов и построение эпюры N_F.

13. Статические проверки расчета: при правильном расчете любая отсеченная часть расчетной схемы или вся схема, отсеченная от опор, под действием внутренних и внешних сил должна находиться в равновесии.

Как видно из пп. 10 — 13 настоящей последовательности ничем не отличаются от пп. 11 — 14 табл. 5.1 последовательности расчета методом сил, т. е. независимо от метода расчета указанные пункты выполняются одинаково.

Рассмотрим несколько примеров расчета рам методом перемещений.

Пример 6.1. Требуется построить эпюры усилий в раме, показанной на рис. 6.6, *а*. Относительные жесткости стержней рамы, приведенные к единому множителю, следующие:

- правой стойки — $i_1 = EI/4 = i$;
- левой стойки — $i_2 = 1{,}5EI/4 = 1{,}5i$;
- ригеля — $i_3 = 2EI/4 = 2i$.

Решение. 1. Рама имеет один жесткий узел, и два ее узла могут совместно перемещаться по горизонтали. Следовательно, степень кинематической неопределимости рамы $n_к = 2$.

2. Система канонических уравнений на основании выражения (6.5) при $n_к = 2$ будет иметь вид

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

3. Основную систему получим введением одной угловой и одной линейной дополнительных связей (рис. 6.6, *б*).

4. Последовательно зададим введенным дополнительным связям принудительные единичные смещения, покажем деформированные схемы основной системы от этих смещений (рис. 6.6, *в* и *г*) и, используя Приложение 1, построим в основной системе эпюры M_1^0 и M_2^0.

5. Приложив к стержням основной системы заданную нагрузку с использованием Приложения 2 построим эпюру M_F^0 (рис. 6.6, *д*).

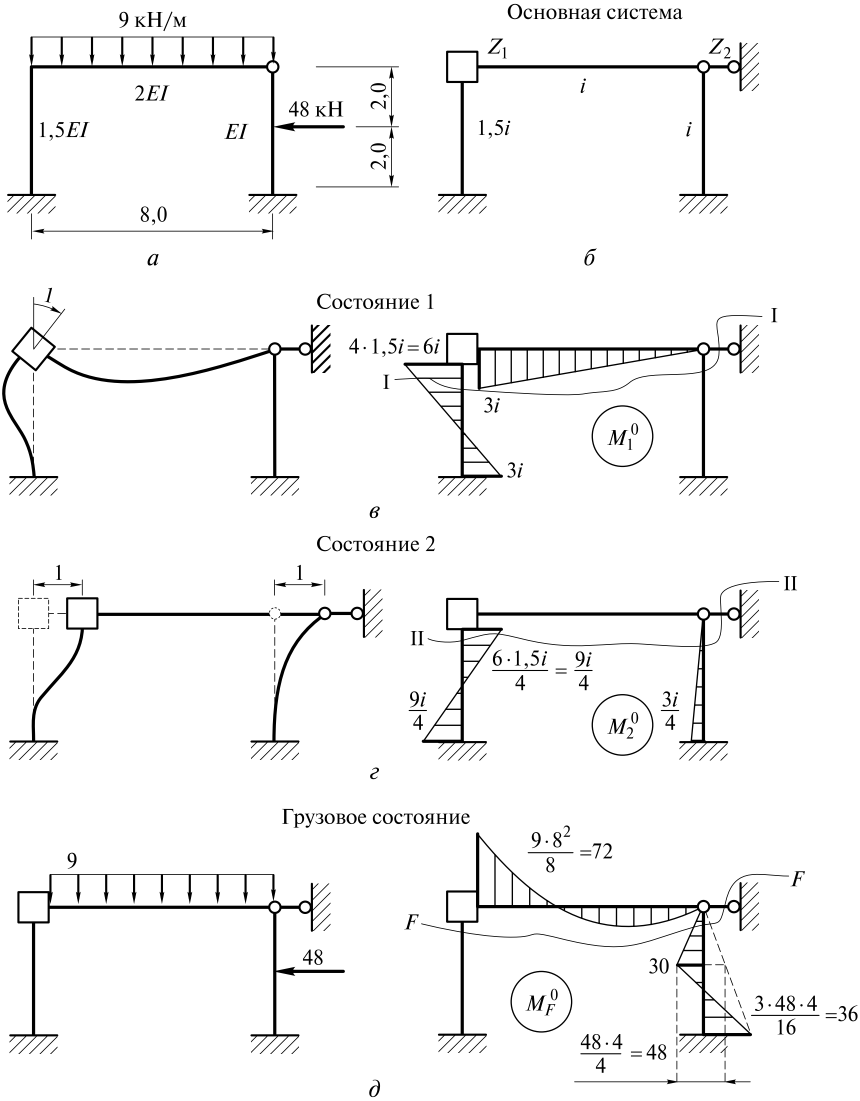

Рис. 6.6

6. Определим реакции в дополнительных связях в следующем порядке.

Сначала найдем реакции первого канонического уравнения, описывающего статическое условие равенства нулю суммы реакций в угловой дополнительной связи. Для этого вырежем узел вместе со связью (рис. 6.7, *а*), последовательно прикладывая к нему изгибаю-

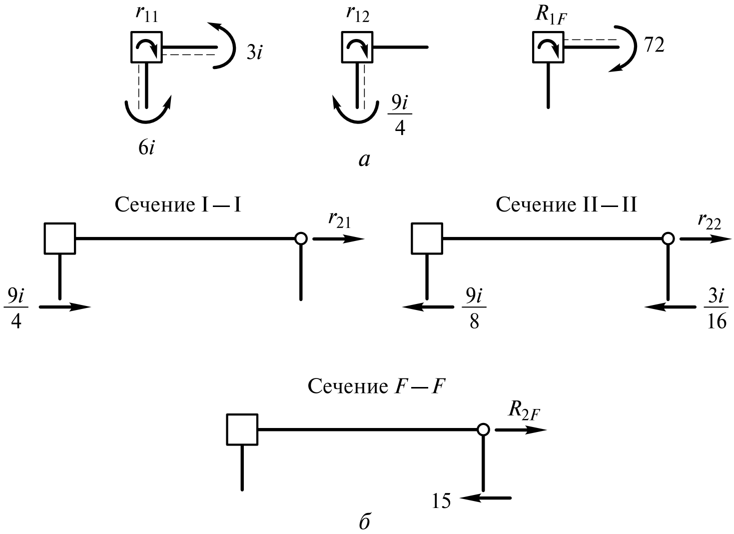

Рис. 6.7

щие моменты с эпюр M_1^0, M_2^0 и M_F^0, соответствующих трем расчетным состояниям. Из условий равновесия получим

$$r_{11} = 9i \text{ (кН·м/рад)}; \; r_{12} = -\,9i/4 \text{ (кН)}; \; R_{1F} = -72 \text{ кН·м}.$$

Для определения реакций второго канонического уравнения, описывающего статическое условие равенства нулю суммы реакций в линейной связи, для каждого из расчетных состояний рассмотрим отсеченную часть основной системы (сечения I—I, II—II и F—F, рис. 6.7, *б*) и из условия их равновесия получим

$$r_{21} = -9i/4 \text{ (кН/рад)}; \; r_{22} = 21i/16 \text{ (кН/м)}; \; R_{2F} = 15 \text{ кН}.$$

7. Система канонических уравнений в численном виде будет иметь следующий вид:

$$9iZ_1 - \frac{9i}{4}Z_2 - 72 = 0;$$

$$-\frac{9i}{4}Z_1 + \frac{21i}{16}Z_2 + 15 = 0;$$

а ее решение

$$Z_1 = 9/i \text{ (рад)}; \; Z_2 = 4/i \text{ (м)}.$$

8. Построим эпюру изгибающих моментов в заданной схеме на (см. условие (6.9)):

$$M_F = M_1^0 Z_1 + M_2^0 Z_2 + M_F^0.$$

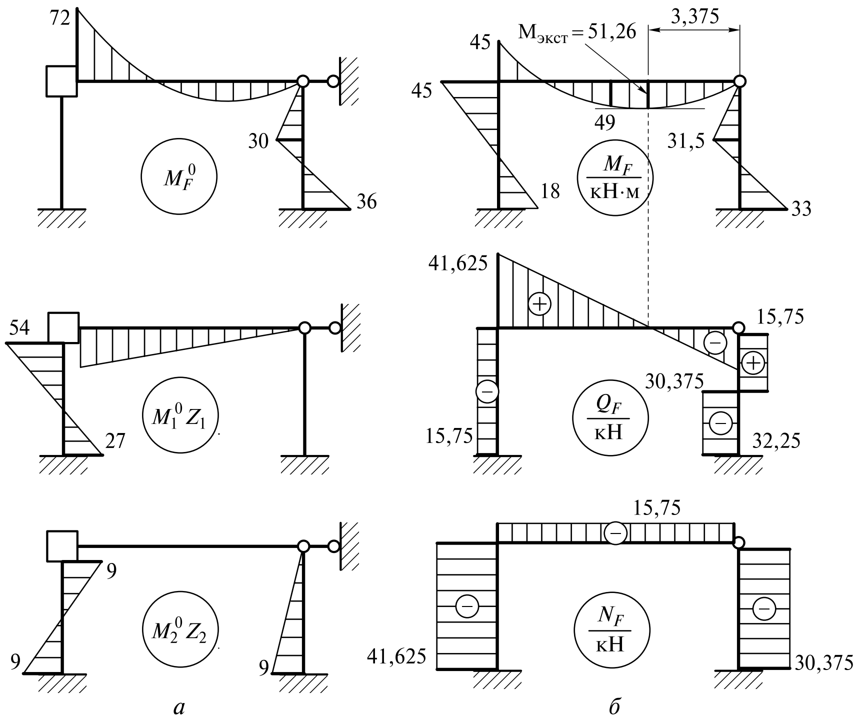

Рис. 6.8

Все слагаемые данной формулы приведены на рис. 6.8, *а*, а результат сложения — эпюра M_F — на рис. 6.8, *б*.

9. Проверку равновесия жесткого узла по полученной эпюре M_F в данной задаче можно выполнить визуально, так как в узле сходятся всего два стержня.

10. Проведем деформационную проверку. Для этого определим степень статической неопределимости рамы. При К = 1, Ш = 1 $n_с = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Статически определимая основная система для рамы показана на рис. 6.9, *а*. В приведенной основной системе построим вспомогательную эпюру $\bar{M}_s^0$ от действия сразу двух единичных моментов, приложенных по направлениям удаленных связей. Тогда

$$\sum_m \int_0^1 \frac{\bar{M}_s^0 M_F}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{1,5}\left(-\frac{45-18}{2}\cdot 4\cdot 1\right)+\frac{8}{2\cdot 6}(-45\cdot 1+4\cdot 0,5\cdot 49,5)\right]=$$

$$=\frac{1}{EI}(-66+66)=0,$$

следовательно, деформационная проверка выполняется.

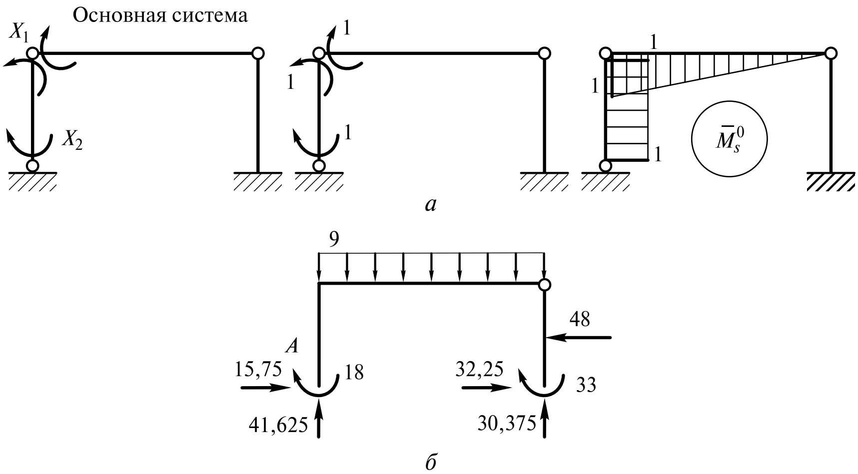

Рис. 6.9

11. Эпюры Q_F и N_F строим по методике, приведенной в пп. 11 и 12 примера 5.2 (см. рис. 6.8, *б*):

12. Выполним статические проверки расчета, рассмотрев равновесие всей рамы, предварительно определив по построенным эпюрам все опорные реакции (рис. 6.9, *б*):

$$\sum X = 0, \quad 15{,}75 + 32{,}25 - 48 = 0;$$

$$\sum Y = 0, \quad 41{,}625 + 30{,}375 - 9 \cdot 8 = 0;$$

$$\sum M_A = 0, \quad 18 + 9 \cdot 8 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 33 - 30{,}375 \cdot 8 = 339 - 339 = 0.$$

Таким образом, статические проверки также выполняются, следовательно, расчет произведен правильно.

Пример 6.2. Требуется построить эпюру изгибающих моментов M_F в раме, показанной на рис. 6.10, *а*.

Относительные жесткости стержней рамы одинаковы, так как $1{,}25EI/5 = EI/4 = i$.

Решение. 1. Степень кинематической неопределимости рамы в силу линейной неподвижности ее узлов $n_к = n_у = 1$. Следовательно, каноническое уравнение метода перемещений будет единственным: $r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0$.

2. Основную систему получим введением одной дополнительной угловой связи (рис. 6.10, *б*).

3. Деформированную схему основной системы от принудительного поворота дополнительной связи на угол, равный единице, и соответствующую ей эпюру M_1^0 (рис. 6.10, *в*) строим с помощью Приложения 1.

4. Так как внешняя действующая нагрузка является узловой и непосредственно воспринимается введенной дополнительной угловой

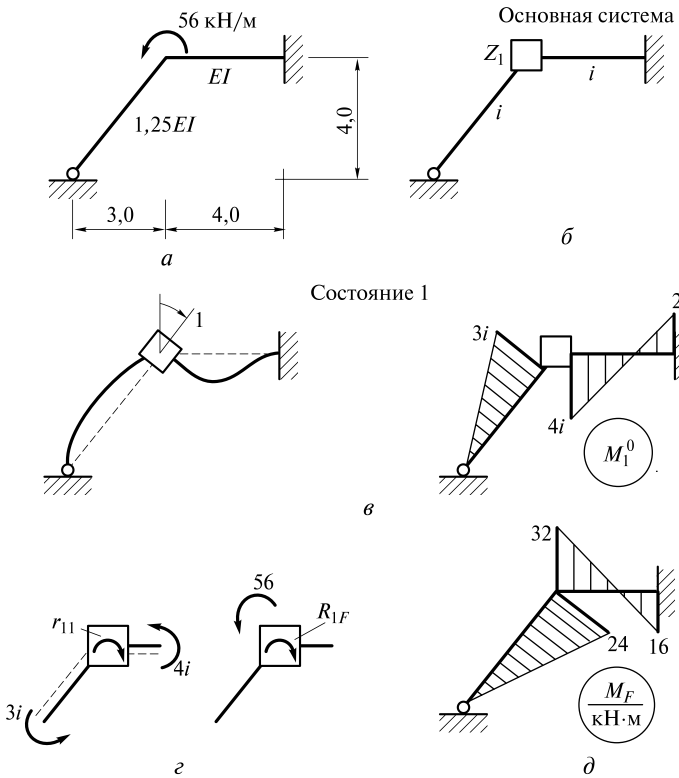

Рис. 6.10

связью, стержни основной системы не загружены и, следовательно, в грузовом состоянии эпюра $M_F^0 = 0$.

5. Реакции в дополнительной связи определим из условий равновесия (рис. 6.10, *г*): $r_{11} = 7i$ (кН·м/рад); $R_{1F} = 56$ кН·м.

6. Запишем каноническое уравнение в численном виде

$$7iZ_1 + 56 = 0,$$

откуда $Z_1 = -56/7i = -8/i$ (рад).

Эпюру изгибающих моментов в заданной раме строим по формуле (6.9) при $M_F^0 = 0$, т.е. $M_F^0 = M_1^0 Z_1$ (рис. 6.10, *д*).

Пример 6.3. Требуется построить эпюру изгибающих моментов M_F в раме, показанной на рис. 6. 11, *а*.

Относительные жесткости стержней рамы следующие:

- левой стойки — $i_1 = EI/4 = i$;
- правых стоек — $i_2 = 2EI/4 = 2i$.

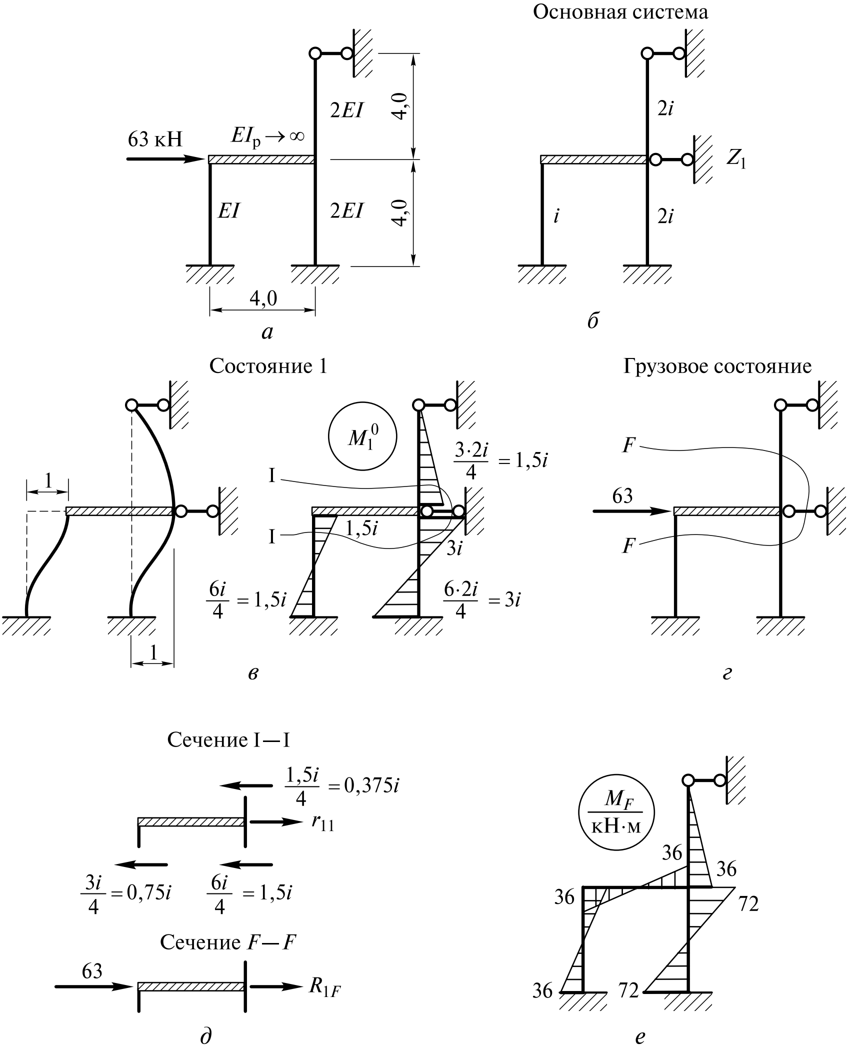

Рис. 6.11

Ригель рамы имеет бесконечную жесткость при изгибе, поэтому узлы рамы не способны к повороту.

Р е ш е н и е. 1. Степень кинематической неопределимости рамы $n_к = n_л = 1$, так как узлы рамы поворачиваться не могут, а для ригеля за счет изгиба стоек рамы возможно только одно горизонтальное линейное смещение. Следовательно, каноническое уравнение метода перемещений будет единственным:

$$r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0.$$

2. Основную систему получим введением одной дополнительной линейной связи (рис. 6.11, *б*).

3. Деформированную схему основной системы от принудительного смещения дополнительной связи на величину, равную единице, и соответствующую ей эпюру M_1^0 строим с помощью Приложения 1 (рис. 6.11, *в*).

4. Так как внешняя действующая нагрузка является узловой и непосредственно через ригель воспринимается введенной дополнительной линейной связью, стержни основной системы не загружены и, следовательно, в грузовом состоянии (рис. 6.11, *г*) эпюра $M_F^0 = 0$.

5. Реакции в дополнительной связи в обоих расчетных состояниях определим из условий равновесия вырезанного замкнутыми сечениями ригеля (рис. 6.11, *д*):

$$r_{11} = 2{,}625i \text{ (кН/м)}; \; R_{1F} = -63 \text{ кН}.$$

6. Запишем каноническое уравнение в численном виде:

$$2{,}625iZ_1 - 63 = 0,$$

откуда $Z_1 = 63/2{,}625i = 24/i$ (м).

7. Эпюру изгибающих моментов в заданной схеме рамы строим по формуле (6.6) при $M_F^0 = 0$, т. е. $M_F^0 = M_1^0 Z_1$ (рис. 6.11, *е*). При этом эпюру изгибающих моментов на абсолютно жестком ригеле достраиваем по значениям в крайних сечениях, определенных из условий равновесия узлов.

Пример 6.4. Требуется построить эпюру изгибающих моментов M_F в раме с наклонной стойкой, показанной на рис. 6. 12, *а*.

Относительные жесткости стержней рамы следующие:

- левой наклонной стойки — $i_1 = 1{,}25EI/5 = 1{,}5i$;
- ригеля — $i_2 = EI/6 = i$;
- правой стойки — $i_3 = 0{,}5EI/3 = i$.

Решение. 1. Степень кинематической неопределимости рамы $n_к = n_у + n_л = 1 + 1 = 2$. Следовательно, каноническое уравнение метода перемещений будет второго порядка:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

2. Основную систему получим введением одной дополнительной линейной связи и одной угловой. При этом для данной рамы дополнительная линейная связь может быть поставлена либо по направлению возможного перемещения узла *C* (рис. 6.12, *б*), либо по направлению возможного перемещения узла ***B*** перпендикулярно наклонной стойке (рис. 6.12, *в*). Для расчета примем первый вариант основной системы.