Среднее (полное) общее образование

М.И.Башмаков

МАТЕМАТИКА

11 класс

Сборник задач

3-е издание

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2012

УДК 372.851(075.3)
ББК 22.1я721
Б336

Башмаков М. И.

Б336 Математика. 11 класс. Сборник задач : среднее (полное) общее образование / М.И.Башмаков. — 3-е изд. — М. : Издательский центр «Академия», 2012. — 288 с.

ISBN 978-5-7695-9392-5

Книга содержит учебные задания по курсу математики для 11 класса. В нее включены разнообразные задания как на базовом, так и на профильном уровнях обучения. Выбор тем соответствует учебнику М.И.Башмакова «Математика. 11 класс», выпущенному в Издательском центре «Академия». Задания структурированы по ведущему типу деятельности: алгоритмические (тренажеры), информационные (матричные тесты), прикладные, исследовательские (сюжеты для исследования и задачи на доказательство). Приведены самостоятельные работы и контрольные тесты с выбором ответа.

Для учащихся 11 классов, изучающих предмет на базовом и профильном уровнях.

УДК 372.851(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-7695-9392-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение задач — главная составляющая изучения математики.

Задания данного сборника соответствуют учебнику М. И. Башмакова «Математика. 11 класс» (Москва, Издательский центр «Академия»), содержащему следующие темы:

1) геометрические тела;
2) тригонометрические функции;
3) начала математического анализа;
4) измерения в геометрии;
5) теория вероятностей;
6) уравнения и неравенства.

Задания сборника задач предполагают различный стиль учебной деятельности. Наиболее знакомый стиль учебной деятельности — алгоритмический. Он базируется на выполнении серий упражнений в целях овладения умениями работать с новыми понятиями. Многие упражнения выполняются по образцу, на основе готовых правил и алгоритмов. Этот тип задач представлен в виде наборов тренажеров, каждый из которых ориентирован на овладение определенным алгоритмом.

Важным направлением изучения математики является развитие навыков работы с информацией, представленной на различном информационном языке. Прежде всего имеются в виду связи между словесным, символьным (формульным) и образным (графическим) описаниями. Для тренировки в установлении этих связей выбрана форма матричного теста.

Следующим не менее важным направлением является решение прикладных задач. Значительная часть решения таких задач — это перевод прикладной задачи на математический язык, построение математической модели.

Наиболее сложным, но вместе с тем интересным направлением является исследовательская работа. Она предполагает погружение в определенную ситуацию. В данном случае есть место эксперименту, знакомству с примерами, творческой самостоятельности, способности к обобщению. Задания такого типа представлены в форме сюжетов, на основе которых разворачивается достаточно широкий спектр задач.

Для контроля и самоконтроля в сборник задач включены самостоятельные работы.

Особую роль в сборнике играют заключительные тесты с выбором ответа. Этот вид контрольных заданий стал в последние годы очень популярным, поэтому в книгу включено большое число разнообразных тестов, которые должны помочь учащимся лучше освоить тему.

Все задания разделены на три уровня сложности: А, Б и В, что позволяет использовать сборник задач как на базовом, так и на профильном уровне обучения.

глава

1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Проверка готовности к решению задач

1. Сколько ребер у четырехугольной призмы?
2. На сколько частей делят пространство четыре плоскости, в которых лежат грани треугольной пирамиды?
3. Сколько существует видов правильных многогранников?
4. Может ли в сечении куба получиться пятиугольник?
5. Сколько плоскостей симметрии у куба?
6. Каким может быть угол между двумя противоположными ребрами правильного тетраэдра?
7. Может ли в сечении шара получиться круг, радиус которого больше радиуса шара?
8. Что такое касательная плоскость к шару?
9. Что представляет собой развертка боковой поверхности конуса?
10. Что общего в построении цилиндра и призмы?

Тренажеры

Общие свойства многогранников

Вершины, ребра, грани

Подсчитайте число вершин (v), ребер (e) и граней (f) следующих многогранников и проверьте справедливость теоремы Эйлера: $v - e + f = 2$ (**1.1 — 1.2**).

А

1.1. а) Параллелепипед;
б) тетраэдр;
в) куб;
г) октаэдр;
д) додекаэдр;
е) икосаэдр.

Б

1.2. а) n-Угольная пирамида;
б) n-угольная призма;
в) усеченная n-угольная пирамида;
г) n-угольная антипризма;
д) архимедовы тела.

В

1.3. В вершине многогранника сходится n ребер. Вершину срезали: провели сечение плоскостью вблизи вершины, пересекающее n ребер. Как изменились числа v, e и f? Сохранилось ли соотношение теоремы Эйлера?

1.4. Предположим, что у многогранника есть вершина, в которой сходятся три ребра. Проверьте, что это свойство сохранится после срезания этой вершины.

1.5. Докажите, что существует многогранник, имеющий $3k$ ребер при любом $k \geq 2$.

1.6. С каким числом ребер можно построить многогранники, начиная с четырехугольной и пятиугольной пирамид, срезая вершины с тремя ребрами при них?

1.7. С помощью теоремы Эйлера докажите, что не существует многогранника, имеющего семь ребер.

Изображение многогранников

Постройте на плоскости изображения следующих тел и их сечений (**1.8—1.9**).

А

1.8. а) Куба;
б) прямой шестиугольной призмы;
в) наклонного параллелепипеда;
г) тетраэдра;
д) правильной четырехугольной пирамиды;
е) четырехугольной пирамиды, одно ребро которой перпендикулярно плоскости основания;
ж) четырехугольной пирамиды, вершина которой проектируется в середину одной из сторон основания;
з) четырехугольной пирамиды, две смежные грани которой перпендикулярны основанию.

Б

1.9. а) Сечений куба в форме n-угольников ($n = 3, 4, 5, 6$);
б) усеченной правильной треугольной пирамиды;
в) сечений правильной треугольной пирамиды, являющихся различными по форме треугольниками;
г) сечений правильной треугольной пирамиды, являющихся различными по форме четырехугольниками;
д) различных по форме сечений параллелепипеда.

1.10. Через некоторую точку диагонали куба перпендикулярно этой диагонали проведена плоскость. Докажите, что в сечении получится либо равносторонний треугольник, либо правильный шестиугольник.

В

1.11. Изобразите:
а) октаэдр;

б) многогранник, получающийся соединением центров граней куба;
в) многогранник, вершинами которого являются середины всех ребер куба;
г) четырехугольную антипризму;
д) различные по форме сечения правильной четырехугольной пирамиды, проходящие через сторону основания;
е) сечение правильной четырехугольной пирамиды через сторону основания, перпендикулярное противолежащей боковой грани;
ж) сечения правильной четырехугольной пирамиды через середины двух смежных сторон основания (различные по форме).

Развертки и разрезания

А

1.12. Какие из фигур, изображенных на рис. 1.1, могут быть развертками поверхности куба?

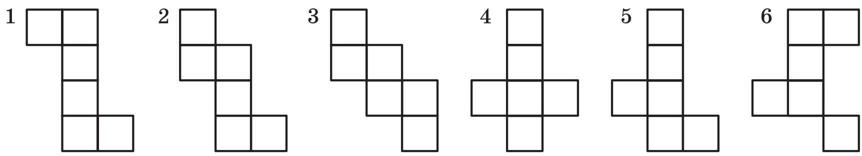

Рис. 1.1

1.13. Какие из фигур, изображенных на рис. 1.2, могут быть развертками поверхности тетраэдра?

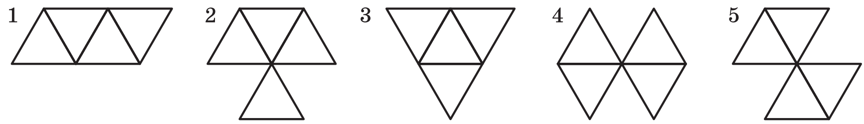

Рис. 1.2

1.14. Разрежьте куб на три равные четырехугольные пирамиды.

Б

1.15. Две точки A и B находятся по одну сторону от некоторой плоскости. Постройте в этой плоскости точку C такую, чтобы сумма расстояний $|AC| + |CB|$ была минимальной.

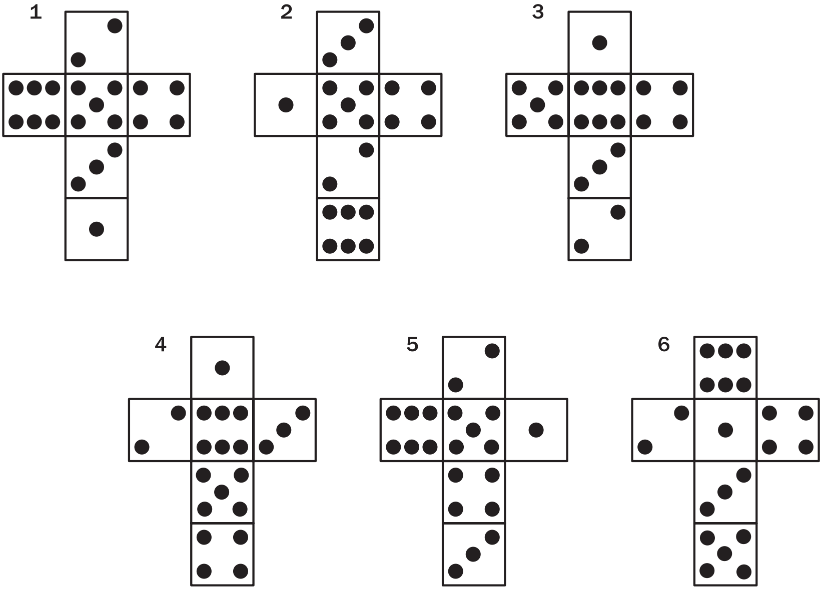

Рис. 1.3

1.16. Постройте кратчайший путь по поверхности куба от одной вершины до другой, ей противоположной.

1.17. Постройте кратчайший путь по поверхности правильного тетраэдра, соединяющий середины его противоположных ребер.

1.18. Из каких приведенных на рис. 1.3 разверток поверхности куба можно склеить изображенную на рис. 1.4 игральную кость?

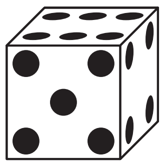

Рис. 1.4

B

1.19. На сколько частей можно разрезать тетраэдр двумя плоскостями? Сколько при этом можно получить тетраэдров?

1.20. Сколько нужно провести плоскостей, чтобы разбить куб на тетраэдры?

1.21. Разрежьте тетраэдр плоским сечением так, чтобы ни один из получившихся многогранников не был тетраэдром.

1.22. Разрежьте треугольную призму на три тетраэдра.

1.23. Постройте кратчайший замкнутый путь по поверхности правильной четырехугольной пирамиды, пересекающий (хотя бы в вершинах) все ребра пирамиды.

Вычисления

Четырехугольная пирамида

А

1.24. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ введены следующие обозначения:
a — сторона основания AB; h — высота; l — боковое ребро; d — апофема (высота боковой грани, опущенная из вершины S); α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания; β — угол наклона боковой грани к плоскости основания; R — радиус описанного шара; r — радиус вписанного шара.
Заполните следующую таблицу:

№	a	h	l	d	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	R	r
1	6	4						
2			6		$\frac{1}{2}$			
3				5		$\frac{4}{5}$		
4					$\frac{3}{5}$		2	
5		3						1

Б

1.25. Вычислите расстояние от вершины, лежащей в основании правильной четырехугольной пирамиды, до противоположного бокового ребра, если все ребра пирамиды равны единице.

1.26. Определите двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, боковая грань и диагональное сечение которой равновелики.

1.27. Основанием пирамиды является ромб, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ дм и проходит через центр основания. Найдите сторону основания пирамиды, если расстояния от центра основания пирамиды до боковых ребер равны 2 и $\sqrt{3}$ дм.

В

1.28. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб (рис. 1.5). (Это означает, что одно его основание лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного основания расположены на боковых ребрах пирамиды.) Вычислите ребро куба, если известны сторона основания пирамиды a и ее боковое ребро l.

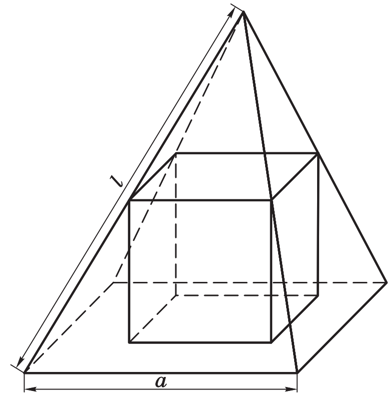

Рис. 1.5

1.29. От правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны единице, отсекают верхнюю часть плоскостью, параллельной плоскости основания. На какой высоте надо провести сечение, чтобы боковые ребра усеченной пирамиды равнялись сторонам ее верхнего основания?

1.30. Среди всех правильных четырехугольных пирамид с площадью боковой поверхности, равной 4, найдите такую, у которой боковое ребро минимально. В ответе укажите длину стороны основания этой пирамиды.

Треугольная пирамида

А

1.31. Для правильной треугольной пирамиды $SABC$ введены следующие обозначения:
a — сторона основания AB; h — высота; l — боковое ребро; d — апофема (высота боковой грани, опущенная из вершины S); α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания; β — угол наклона боковой грани к плоскости основания; R — радиус описанного шара; r — радиус вписанного шара.

Заполните следующую таблицу:

№	a	h	l	d	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	R	r
1	4	6						
2			2		$\frac{1}{2}$			
3				4		$\frac{3}{5}$		
4					$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	
5						$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1

1.32. Основание пирамиды — треугольник, одна из сторон которого равна 3, а угол, лежащий против нее, равен 30°. Найдите высоту пирамиды, если каждое боковое ребро ее равно 5.

1.33. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8. Двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

1.34. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой l. Боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

1.35. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые ребра равны между собой и равны l. Найдите высоту пирамиды.

1.36. Найдите боковое ребро треугольной пирамиды, высота которой проходит через центр окружности, описанной около основания:

а) стороны основания пирамиды равны 50, 78 и 112 см, а высота равна 72 см;

б) стороны основания пирамиды равны 4, 4 и 4,8 дм, а высота равна 6 дм.

Б

1.37. Боковые грани треугольной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а периметр основания равен

60 см. Два боковых ребра пирамиды равны 15 и 20 см и образуют прямой угол. Найдите длину третьего бокового ребра.

1.38. Найдите высоту треугольной пирамиды $SABC$, у которой $AB = BC = SA = SC = 4\sqrt{3}$ дм, периметр основания равен 16 дм и боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания.

1.39. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона — 10. Боковые ребра образуют с основанием равные углы по 45°. Найдите высоту пирамиды.

1.40. Высота треугольной пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание окружности. Найдите высоту боковой грани, если стороны основания и высота пирамиды равны соответственно:

а) 25, 39, 56 и 24 см;
б) 25, 29, 36 и 15 см;
в) 29, 35, 48 и 40 см.

1.41. Два боковых ребра треугольной пирамиды и заключенная между ними сторона основания равны соответственно 6, 9 и 9 дм. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности и равна $3\sqrt{3}$ дм. Найдите длины неизвестных сторон основания.

1.42. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите высоту боковой грани (апофему) пирамиды, если сторона основания равна единице.

B

1.43. Все грани тетраэдра — равные равнобедренные треугольники. Высота тетраэдра совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите высоту тетраэдра, если расстояние между наибольшими боковыми ребрами равно единице.

1.44. Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего и наименьшего ребер этого тетраэдра.

1.45. Найдите длину бокового ребра правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{7}$ дм, а высота боковой грани, опущенная на боковое ребро, — $\sqrt{5}$ дм.

1.46. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 120°; расстояние от центра основания пирамиды до бокового ребра равно a. Найдите высоту пирамиды.

1.47. Основание пирамиды — треугольник, одна сторона которого равна 8 дм, а разность двух других — 2 дм. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°; высота боковой грани больше высоты пирамиды на 1 дм. Найдите неизвестные стороны основания пирамиды.

1.48. Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. Найдите, на какие отрезки высота пирамиды делит сторону основания.

Различные пирамиды

А

1.49. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 10. Через середину высоты проведено сечение, перпендикулярное высоте. Докажите, что $SA \perp BF$; будет ли $SA \perp DE$. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) угол между SA и плоскостью основания;
в) площадь сечения;
г) угол между ребрами SA и SE;
д) угол между плоскостями ABS и EDC.

1.50. Найдите высоту правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а косинус двугранного угла при боковом ребре равен $-0{,}625$.

Б

1.51. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7. Стороны основания равны 10 и 2. Найдите:
а) высоту боковой грани;
б) длину бокового ребра;
в) угол наклона боковых ребер к основанию;
г) площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основанию.

В

1.52. В правильной n-угольный пирамиде все ребра равны между собой. При каких значениях n это возможно?

Призмы

А

1.53. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами 45 и 30°. Найдите косинус угла между этими диагоналями.

1.54. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 16 см, площадь полной поверхности равна 168 см^2 и объем равен 108 см^3.

1.55. Через диагональ AC квадрата $ABCD$, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда, и вершину B_1 другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник AB_1C с углом при вершине B_1 в два раза бóльшим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол AB_1C.

1.56. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

1.57. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с основаниями a и b и высотой h. Найдите острый угол, образованный двумя соседними боковыми гранями.

Б

1.58. В сечении прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30°.

1.59. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как 2 : 7, бóльшая из диагоналей основания равна $10\sqrt{3}$ см и образует с меньшей стороной основания угол 30°. Определите меньшую диагональ параллелепипеда, если площадь боковой поверхности его равна 1 080 см^2.

1.60. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной, равной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

1.61. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, боковые ребра составляют со смежными сторонами основания углы 60°. Найдите площадь полной поверхности призмы.

B

1.62. Определите стороны основания прямого параллелепипеда, объем которого равен 3 360 см^3, площадь полной поверхности равна 1 416 см^2, площадь боковой поверхности — 1 080 см^2, а большая диагональ параллелепипеда — 29 см.

1.63. В сечении прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, получается ромб с острым углом 60°. Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

1.64. В параллелепипеде все грани — равные ромбы с острым углом 60° и стороной, равной a. Найдите:
а) диагонали параллелепипеда;
б) высоту параллелепипеда;
в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
г) острый угол между двумя соседними гранями.

1.65. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая это основание под углом α и три боковых ребра призмы. Определите площадь полученного сечения и его острый угол, если сторона основания призмы равна b.

Круглые тела

A

1.66. Постройте на плоскости изображения следующих тел:
а) прямой круговой цилиндр;
б) прямой круговой конус;
в) усеченный прямой круговой конус.