ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Г. М. АМАТОВА, М. А. АМАТОВ

МАТЕМАТИКА

В ДВУХ КНИГАХ

Книга 1

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по специальности
«Педагогика и методика начального образования»

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
А612

Р е ц е н з е н т ы:
канд. физ.-мат. наук, доц. *А.Л.Чекин* (Московский педагогический государственный университет);
канд. пед. наук, доц. *В.С.Самойлов* (Курский государственный университет)

Аматова Г. М.

А612 Математика : в 2 кн. Кн. 1 : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Г.М.Аматова, М.А.Аматов. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 256 с.

ISBN 978-5-7695-3999-2

В учебном пособии представлены все разделы типовой программы курса математики, который читается в вузах на факультетах подготовки учителей начальных классов. Показано, как те или иные теоретические знания могут быть применены для решения конкретных практических вопросов.

Для студентов высших педагогических учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-4001-1
ISBN 978-5-7695-3999-2 (кн.1)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход современной начальной школы на вариативные программы и учебники, а также получившая всеобщее признание концепция всестороннего развития ребенка требуют соответствующей подготовки учителей начальных классов. Роль математики в этом профессиональном становлении переоценить трудно.

Среди основных целей обучения математике в начальной школе прежде всего следует отметить развитие логического мышления, понимание прикладного значения математики.

Исходя из указанных целей, можно сформулировать следующие задачи преподавания математики в педагогических вузах на факультетах подготовки учителей начальных классов:

расширение и углубление у студентов знаний теоретического материала, на основе которого строится начальный курс математики как по ныне действующим программам, так и с учетом возможного внедрения в начальную школу новых разделов математики;

обеспечение ориентирования будущего учителя в содержании и методике преподавания математики в среднем звене школы;

развитие умения самостоятельной работы с учебными пособиями и другой математической литературой;

раскрытие мировоззренческого значения математики, углубление представлений о ее роли в изучении окружающего мира и значении математических методов для других наук.

Поставленные задачи определяют содержание данного учебного пособия, которое состоит из двух книг, отражает в полном объеме все разделы типовой программы курса «Математика» для специальности 050708 «Педагогика и методика начального образования» и написано с учетом специфики математической подготовки учителя начальных классов.

Книга 1 содержит восемь глав. Первые три главы: «Множества и операции над ними», «Элементы математической логики», «Соответствия» определяют общетеоретическую базу для дальнейшего изложения программного материала. Действительно, именно теория множеств является основой начального курса математики. В процессе же изучения логического материала у будущих учителей формируются умения анализировать логическую структуру определений и теорем, проводить анализ простейших рассуждений, углублять представления о роли и месте дедуктивного вывода. Кроме того, в этих главах вводится основная терминология. Материал главы 4 «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» и главы 5 «Алгебраические структуры» излагается с опорой на теоретико-множественную основу.

Глава 6 «Различные подходы к понятию целого неотрицательного числа» особенно важна с точки зрения профессиональной направленности изучаемого материала, поскольку только теоретические знания этого вопроса позволят учителю грамотно сформировать понимание первоклассниками различных функций числа: количественной, порядковой, как меры величины, как результата вычислений.

Далее в ходе изучения главы 7 «Системы счисления» знания студентов о целых неотрицательных числах существенно расширяются. Здесь обобщаются сведения о записи и чтении многозначных чисел, об алгоритмах выполнения действий над ними в десятичной и других позиционных системах счисления.

Содержание главы 8 «Основы теории делимости» направлено на дальнейшее совершенствование умений студентов доказывать теоремы и использовать теоретические положения при решении практических задач. Сведения о простых числах и расположении их в натуральном ряду существенно расширяют общий кругозор студентов. Кроме того, в процессе работы над этой темой у студентов совершенствуются как вычислительные навыки, так и умения устанавливать факты делимости числовых выражений на то или другое составное число. Изучение материала главы предполагает получение сведений о свойствах множества целых неотрицательных чисел, знание которых необходимо современному учителю начальных классов.

Вторая книга начинается с главы 9 «Расширение понятия числа», в которой рассматриваются целые рациональные числа.

В главе 10 «Уравнения. Неравенства. Функции» на основе понятий равносильности уравнений и неравенств дается теоретическое обоснование приемов решения уравнений и неравенств с одной и двумя переменными, а также их систем и совокупностей.

Содержание главы 11 «Элементы геометрии» направлено на помощь будущим учителям начальных классов в систематизации геометрических знаний, а также в углублении теории и методики решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, поскольку эти задачи наилучшим образом способствуют развитию пространственных представлений.

В главе 12 «Величины и их измерение» наряду с геометрическими рассматриваются и физические скалярные величины.

Учебное пособие может быть использовано как для работы студентов под руководством преподавателя, так и для их самостоятельного изучения курса математики.

Изложенный в пособии материал, по возможности, связан с начальным курсом математики, что также придает книге профессиональную значимость. Кроме того, авторы стремились направить содержание пособия на выработку у студентов общей логико-математической культуры. Насколько это удалось — судить читателям.

ГЛАВА 1

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Множество

1.1.1. Понятие множества

Теория множеств является одной из сравнительно молодых математических дисциплин. Основоположником ее по праву считается немецкий математик Георг Кантор (1845 — 1918). В основе этой теории лежит понятие множества. Согласно Г. Кантору: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Таким образом, множество рассматривалось им как собрание каких-либо предметов реального мира (или объектов нашей интуиции), обладающих общим свойством. Другими словами, множество — это совокупность предметов, сама рассматриваемая как один предмет.

Все сказанное не является определением понятия множества, а всего лишь поясняет его. Множество — самое широкое понятие математики, и, очевидно, не может быть определено через другие, более простые понятия.

Человеческому мышлению свойственно группировать различные предметы по какому-либо признаку в самостоятельный объект. В языке это обстоятельство достаточно полно отражается в словах: «группа», «класс», «компания», «экипаж», «набор», «ансамбль» и др. Эти слова имеют тот же смысл, что и слово «множество».

В окружающей нас реальной действительности мы имеем дело с различными множествами. Так, можно говорить о множестве жителей данного города, о множестве простых чисел, о множестве букв в русском алфавите и т. д. Универсальность этого понятия сделала возможным применение теории множеств не только во всех областях математики, но и в экономике, биологии, лингвистике и других науках.

В разговорной речи термин «множество» всегда связывается с большим числом предметов. В теории множеств это не обязательно. Мы будем рассматривать и бесконечные множества, и множества, содержащие любое конечное число предметов, и даже множество, не содержащее ни одного предмета, — *пустое* множество.

Произвольные множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, $D, \ldots$; пустое множество — символом $\varnothing$.

Всякое множество состоит из некоторых предметов, называемых его *элементами*. Элементы множества будем обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, $d, \ldots$ или какой-нибудь одной буквой с индексом, например $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Отношение между элементами и множеством выражают словами: «является элементом» или «принадлежит». Предложение «Элемент a принадлежит множеству A» обозначим символом $a \in A$. Если же a не является элементом множества A, то будем писать $a \notin A$.

В качестве сокращения для «$a_1 \in A$, и $a_2 \in A, \ldots$, и $a_n \in A$» будем пользоваться записью $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Для числовых множеств будем использовать общепринятые обозначения:

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbf{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел.

1.1.2. Способы задания множеств

Множество можно считать заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Множество можно задать непосредственным *перечислением* всех его элементов в произвольном порядке. В этом случае названия всех элементов множества записываются в строку, отделяются запятыми и заключаются в фигурные скобки. Например, если множество A состоит из однозначных нечетных чисел, то будем писать: $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$. Это множество можно записать и так: $A = \{3,\ 5,\ 1,\ 9,\ 7\}$, или $A = \{9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 5\}$, или перечислением элементов в каком-то другом порядке.

Следует отличать символы a и $\{a\}$. В первом случае a обозначает элемент множества, а во втором — $\{a\}$ — одноэлементное множество.

Очевидно, что перечислением элементов можно задать только конечное множество и то с небольшим числом элементов. Когда задать множество перечислением его элементов трудно или невозможно (в случае бесконечных множеств), то применяют другой способ задания множества — через указание характеристического свойства его элементов.

Определение 1.1. *Характеристическим* свойством, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.

Множество B, определяемое некоторым характеристическим свойством P, будем обозначать символом: $B = \{x|P(x)\}$, который читается так: «B есть множество всех x, таких, что x обладает свойством P», или «B есть множество всех x, обладающих свойством P».

Например, запись $B = \{x|x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x < 3\}$ означает, что множество B состоит из целых чисел, бóльших или равных -2 и меньших 3, а $C = \{x|2x^2 - x - 3 = 0\}$ есть множество корней уравнения $2x^2 - x - 3 = 0$.

Таким образом, для того чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов.

Часто одно и то же множество может быть задано и первым, и вторым способами. Например, заданные выше с помощью характеристического свойства множества B и C могут быть заданы и перечислением элементов, т. е. $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $C = \{-1,\ 3/2\}$.

Чтобы наглядно изображать множества, английский математик Джон Венн (1834—1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707—1783) для изображения отношений между множествами использовал круги.

Точки внутри круга считаются элементами множества. Позднее такие изображения получили название диаграмм Эйлера—Венна.

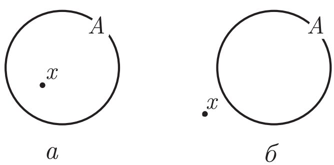

Рис. 1.1

Если элемент $x \in A$, то соответствующая диаграмма имеет вид, представленный на рис. 1.1, *а*. Если же элемент $x \notin A$, то соответствующая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 1.1, *б*.

1.1.3. Отношения между множествами

Пусть даны два произвольных множества A и B. Рассматривая вопрос об отношениях между ними, необходимо прежде всего отметить две возможности.

I. Множества A и B не имеют общих элементов, т. е. из того, что $x \in A$, следует, что $x \notin B$, а из того, что $y \in B$, следует, что $y \notin A$. На диаграммах Эйлера — Венна нет точек (элементов), которые принадлежали бы одновременно A и B (рис. 1.2, *а*).

II. Множества A и B имеют общие элементы, т. е. существуют такие элементы x, для которых верно то, что $x \in A$ и $x \in B$. При этом возможны следующие четыре случая отношений между ними.

1. Не все элементы множества A принадлежат множеству B, и не все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *пересечения.* Диаграмма Эйлера — Венна для этих множеств представлена на рис. 1.2, *б*.

Приведем примеры множеств, находящихся в отношении пересечения:

а) $A = \{$п, и, о, н, е, р$\}$; $B = \{$у, ч, е, н, и, к$\}$;

б) A — множество натуральных делителей числа 72; B — множество натуральных делителей числа 56.

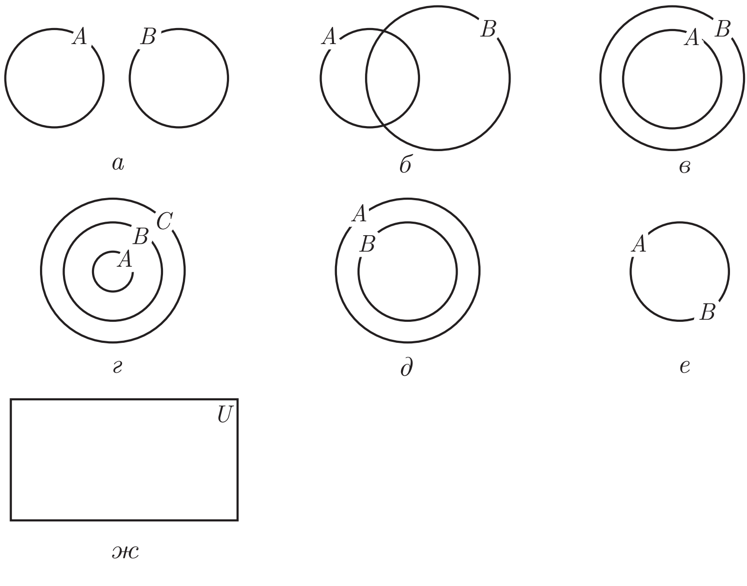

Рис. 1.2

2. Все элементы множества A принадлежат множеству B, множество B может содержать элементы, не принадлежащие множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *включения*.

На диаграмме Эйлера—Венна каждая точка множества A находится внутри фигуры, изображающей множество B (рис. 1.2, *в*).

Например, множества: A — чисел, кратных четырем, и B — чисел, кратных двум, находятся в отношении включения.

Определение 1.2. Множество A называется *подмножеством* (или частью) множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначают включение символом $A \subset B$ и читают: «A включается в B», или «A — подмножество B».

Из определения 1.2 вытекают следующие свойства отношения включения.

1^0. Рефлексивность: $A \subset A$, т. е. всякое множество включается в себя, или всякое множество является подмножеством самого себя.

2^0. Транзитивность: из того что $A \subset B$ и $B \subset C$, следует, что $A \subset C$.

Доказательство этого свойства вытекает из определения включения и рекомендуется читателю в качестве устного упражнения. Проиллюстрируем его на диаграмме Эйлера—Венна (рис. 1.2, *г*).

3^0. Для всякого множества A справедливо включение $\varnothing \subset A$. Поскольку $\varnothing$ не имеет элементов, естественно считать его подмножеством любого множества.

Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называются *несобственными* подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются *собственными*.

3. Не все элементы множества A принадлежат множеству B, но множество A может содержать элементы, не принадлежащие множеству B. В этом случае множество B включается во множество A. Диаграмма Эйлера—Венна представлена на рис. 1.2, *д*.

4. Все элементы множества A принадлежат множеству B, и все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B равны.

Определение 1.3. Два множества A и B называются *равными* (или совпадающими), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Равенство множеств обозначают символом $A = B$ и читают «A равно B». На диаграмме Эйлера—Венна контуры множеств A и B совпадают (рис. 1.2, *е*).

Пусть A — множество гласных букв в слове «белок», а B — множество гласных букв в слове «прогресс». Очевидно, что множества $A = \{e, o\}$ и $B = \{o, e\}$ равны между собой.

Можно дать и другое определение равенства множеств.

Определение 1.4. Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Легко показать, что из определения 1.3 вытекает определение 1.4, и наоборот. Рассуждения, доказывающие этот факт, предлагаем провести самостоятельно.

Отношение равенства множеств обладает следующими свойствами.

1^0. Рефлексивность:$A = A$, т. е. всякое множество равно самому себе.

2^0. Симметричность: если $A = B$, то и $B = A$.

3^0. Транзитивность: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Справедливость свойств $1^0 — 3^0$ очевидно вытекает из определения равенства множеств.

Определение 1.5. Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется *универсальным.*

Например, множество действительных чисел $\mathbf{R}$ является универсальным для вышерассмотренных числовых множеств.

Универсальное множество будем обозначать буквой U, а на диаграммах Эйлера—Венна изображать в виде прямоугольника (рис. 1.2, *ж*).

Упражнения

1. Используя символы, запишите двумя способами множества, элементами которых являются:

а) натуральные числа, меньшие 7;

б) целые числа, большие -3 и меньшие 5;

в) натуральные делители числа 180;

г) корни уравнения $3x^2 + x - 4 = 0$.

2. Изобразите на координатной прямой множества:

а) $A = \{x | x \in \mathbf{R},\ -3 \leq x < 8\}$;

б) $B = \{x | x \in \mathbf{R},\ x < 3{,}7\}$;

в) $C = \{x | x \in \mathbf{R},\ x \geq 5{,}2\}$;

г) $D = \{x | x \in R,\ x^2 - 4x - 21 < 0\}$;

д) $E = \{x | x \in R,\ 4x^2 - 12x + 9 > 0\}$;

е) $F = \left\{x | x \in R,\ \dfrac{x+3}{x-2} \geq 0\right\}$;

ж) $L = \left\{x | x \in R,\ \left|\dfrac{x}{2} - 6\right| \leq 5\right\}$.

3. Определите отношения между множествами:

а) прямоугольных треугольников и равнобедренных треугольников;

б) ромбов и квадратов;

в) прямоугольников и четырехугольников с равными диагоналями;

г) параллелограммов и ромбов;

д) натуральных делителей чисел 42 и 36;

е) простых и однозначных чисел

и изобразите их на диаграммах Эйлера — Венна.

4. Докажите, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

5. Докажите, что $\{\{3,5\},\{5,7\}\} \neq \{3,5,7\}$.

6. Докажите, что если A есть множество корней уравнения $x^3 - 18x^2 + 99x - 162 = 0$ и $B = \{3,6,9\}$, то $A = B$.

7. Приведите примеры трех заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых учащиеся встречаются с двумя способами задания множеств.

8. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, выполнение которых связано с образованием подмножеств данного множества.

1.2. Операции над множествами

1.2.1. Объединение множеств

Пусть даны два множества:

$A = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ — множество двузначных чисел, кратных 15;

$B = \{18, 36, 54, 72, 90\}$ — множество двузначных чисел, кратных 18.

Образуем новое множество, состоящее из элементов этих множеств. Полученное множество $\{15, 18, 30, 36, 45, 54, 60, 72, 75, 90\}$ называют объединением множеств A и B. Число 90 записали один раз, поскольку в записи множеств элементы не должны повторяться.

Определение 1.6. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B.