ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Г. М. АМАТОВА, М. А. АМАТОВ

МАТЕМАТИКА

В ДВУХ КНИГАХ

Книга 2

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по специальности
«Педагогика и методика начального образования»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
А612

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *А.Л. Чекин* (Московский педагогический государственный университет);
канд. пед. наук, доц. *В.С. Самойлов* (Курский государственный университет)

Аматова Г. М.
А612 Математика : в 2 кн. Кн. 2 : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Г.М. Аматова, М.А. Аматов. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 240 с.
ISBN 978-5-7695-4002-8

В учебном пособии представлены все разделы типовой программы курса математики, который читается в вузах на факультетах подготовки учителей начальных классов. Показано, как те или иные теоретические знания могут быть применены для решения конкретных практических вопросов.
Для студентов высших педагогических учебных заведений.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7695-4001-1
ISBN 978-5-7695-4002-8 (кн.2)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предисловии к первой книге была дана достаточно подробная характеристика учебного пособия в целом, поэтому здесь ограничимся лишь замечаниями по содержанию второй книги.

Книга начинается с главы 9 «Расширение понятия числа», в которой рассматриваются целые рациональные числа. В основу построения теории целых и рациональных чисел положены понятия классов эквивалентных пар натуральных или, соответственно, целых чисел. Теория действительных чисел строится на базе аксиомы Кантора о вложенных отрезках. По мнению авторов, такой подход вполне оправдан, так как, с одной стороны, служит образцом построения строгой математической теории целых, рациональных и действительных чисел, а с другой — опирается на материал предыдущих глав этого же учебника и поэтому вполне доступен студентам.

В главе 10 «Уравнения. Неравенства. Функции» на основе понятий равносильности уравнений и неравенств дается теоретическое обоснование приемов решения уравнений и неравенств с одной и двумя переменными, а также их систем и совокупностей. В процессе доказательства основных теорем о равносильности используется аппарат математической логики. Здесь же рассматриваются уравнения линий первого и второго порядков, даются приемы построения их на плоскости. Из числовых функций наиболее подробно исследуются прямая и обратная пропорциональности как имеющие непосредственный выход в начальный курс математики.

Содержание главы 11 «Элементы геометрии» поможет будущим учителям начальных классов систематизировать геометрические знания, полученные в средней школе, а также глубже понять теорию и методику решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, поскольку эти задачи наилучшим образом способствуют развитию пространственных представлений. Кроме того, в этой главе студенты знакомятся с основными приемами изображения плоских и пространственных фигур на проекционном чертеже.

В главе 12 «Величины и их измерение» наряду с геометрическими (длиной, площадью, объемом) рассматриваются и физические (масса и время) скалярные величины. Такой подход определяется профессиональными требованиями к подготовке учителя начальных классов. Величины понимаются как особые свойства объектов или явлений реального мира. Серьезное внимание уделяется теории величин, изучаемых непосредственно в начальном курсе математики. Отдельным пунктом рассматривается вопрос о зависимости между величинами и использовании той или иной зависимости при решении текстовых задач в начальной школе.

Авторы выражают глубокую благодарность руководству Белгородского государственного университета за создание условий для подготовки данного пособия, а также математикам кафедр методики начального образования Курского государственного университета и естественно-математических дисциплин и методики их преподавания Рязанского государственного университета им. С. А. Есенина за внимательное отношение к работе и полезные замечания.

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

9.1. Целые числа

9.1.1. Отрицательные целые числа

В математике имеется ряд задач, неразрешимых во множестве целых неотрицательных чисел. Так, никакое целое неотрицательное число x не может быть решением уравнения $b + x = a$ $(a, b \in \mathbf{N}_0)$, если $a < b$. Другими словами, уравнение $b + x = a$ при $a < b$ не имеет решений во множестве $\mathbf{N}_0$.

Вторая проблема, неразрешимая во множестве целых неотрицательных чисел, возникает при описании процесса измерения величин. Если величина x имела значение $a \in \mathbf{N}_0$ и в результате некоторого процесса уменьшилась на b единиц, то новое ее значение $y = a - b$ оказывается неопределенным в $\mathbf{N}_0$, если $a < b$.

Неразрешимость этих задач приводит к необходимости расширить множество целых неотрицательных чисел. Это расширение достигается путем введения отрицательных целых чисел, которые в объединении с множеством $\mathbf{N}_0$ образуют множество целых чисел.

Отрицательные числа были известны математикам Китая около двух тысяч лет назад. Индийские математики Брахмагупта и Бхаскара II пользовались ими приблизительно в 650 г. В Европе отрицательные числа стали использоваться лишь в XVII в.

Древнегреческий математик Диофант (III в. н. э.) свободно оперировал отрицательными числами. Они постоянно встречались в промежуточных вычислениях его «Арифметики». Однако и в XVI и в XVII вв. многие европейские математики не признавали отрицательных чисел, и если такие числа встречались при вычислениях, они называли их ложными, невозможными.

Положение изменилось после того, как в 1622 г. Жирар (Франция) дал общеизвестный ныне способ геометрического изображения отрицательных чисел. Лет двадцать спустя отрицательные числа получили всеобщее распространение.

Возвращаясь к рассмотренным выше задачам, следует отметить, что их неразрешимость во множестве $\mathbf{N}_0$ связана с невозможностью найти разность $a - b$, если $a < b$.

Наша дальнейшая цель — построить такое числовое множество $\mathbf{Z}$, которое включало бы в себя $\mathbf{N}_0$ и в котором операции сложения, вычитания и умножения были бы определены для всех элементов из $\mathbf{Z}$ и обладали всеми основными свойствами, которые эти операции имели в $\mathbf{N}_0$.

Для этого исследуем свойства всевозможных разностей вида $a - b$, где a и b являются натуральными числами и $a > b$.

Прежде всего каждая такая разность $a - b$ единственным образом задает пару натуральных чисел (a, b), и наоборот. Паре (a, b), где $a > b$, отвечает единственное натуральное число $x = a - b$. В то же время каждому числу $x \in \mathbf{N}$ соответствует бесконечно много пар вида $(c + x, c)$, так как $(c + x) - c = x$ при любом $c \in \mathbf{N}$.

Если одно и то же число $x \in N$ задается двумя различными парами (a, b) и (c, d), то $x = a - b$ и $x = c - d$, откуда $a - b = c - d$ или

$$a + d = b + c. \tag{9.1}$$

Таким образом, две пары (a, b) и (c, d) представляют одно и то же число тогда и только тогда, когда компоненты этих пар удовлетворяют соотношению (9.1). Далее найдем условия, которым удовлетворяют компоненты пар (a, b) и (c, d) при сложении чисел $x = a - b$ и $y = c - d$. Очевидно, что $x + y = (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$. Следовательно, если числа x и y определяются парами (a, b) и (c, d), то их сумма должна определяться парой

$$(a + c, b + d). \tag{9.2}$$

Теперь для чисел $x, y \in \mathbf{N}$, задаваемых парами (a, b) и (c, d), найдем пару натуральных чисел, которая определяет их произведение. Перемножая равенства $x = a - b$ и $y = c - d$, получаем $xy = (ac + bd) - (ad + bc)$. Таким образом, произведение xy определяется парой натуральных чисел

$$(ac + bd, ad + bc). \tag{9.3}$$

Итак, если представлять натуральные числа $x,\ y$ в виде разностей $x = a - b$, $y = c - d$ или, что одно и то же, в виде пар натуральных чисел (a, b) и (c, d), где $a > b$, $c > d$, то их равенство, сумма, произведение определяются условиями (9.1), (9.2), (9.3) соответственно. Но в них над компонентами пар выполняются только операции сложения и умножения, которые всегда осуществимы во множестве натуральных чисел, а значит, условия (9.1), (9.2), (9.3) могут быть распространены на случай пар натуральных чисел (a, b) и (c, d), в которых $a \leq b$, $c \leq d$.

Последним замечанием мы и будем руководствоваться при расширении множества $\mathbf{N}_0$ целых неотрицательных чисел до множества $\mathbf{Z}$. А именно, элемент множества $\mathbf{Z}$ определим как совокупность пар натуральных чисел, удовлетворяющих равенству (9.1). Операции сложения и умножения в $\mathbf{Z}$ определим с помощью пар (9.2) и (9.3) соответственно. При этом будем рассматривать пары, удовлетворяющие как неравенствам $a > b$ и $c > d$, так и неравенствам $a \leq b$, $c \leq d$.

Определение 9.1. Две пары натуральных чисел (a, b) и (c, d) называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда $a + d = b + c$.

Если пары (a, b) и (c, d) эквивалентны, то будем записывать $(a, b) \sim (c, d)$.

Нетрудно показать, что введенное бинарное отношение на множестве пар натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1^0. $(a, b) \sim (a, b)$ — рефлексивность;

2^0. $((a, b) \sim (c, d)) \Rightarrow ((c, d) \sim (a, b))$ — симметричность;

3^0. $(((a, b) \sim (c, d)) \wedge ((c, d) \sim (e, f))) \Rightarrow ((a, b) \sim (e, f))$ — транзитивность.

Выполнимость свойств рефлексивности и симметричности проверяется элементарно. Докажем справедливость свойства транзитивности. По определению, эквивалентности $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$ означают выполнимость следующих равенств: $a + d = b + c$; $c + f = d + e$. К обеим частям первого из этих равенств прибавим f, а к обеим частям второго — b. В результате получим равенства:

$$a + d + f = b + c + f; \qquad b + c + f = b + d + e.$$

Отсюда по транзитивности равенства натуральных чисел можем записать $a + d + f = b + d + e$ или $a + f = b + e$, но последнее равенство означает эквивалентность пар (a, b) и (e, f).

Отношение эквивалентности, установленное на множестве пар натуральных чисел, разбивает это множество на классы попарно эквивалентных элементов. Класс, которому принадлежит пара (a, b), будем обозначать символом $K(a, b)$.

Определение 9.2. Класс эквивалентных пар натуральных чисел называется *целым числом.*

9.1.2. Операции над целыми числами. Свойства операций

Из определения целого числа ясно, что два числа $K(a,b)$ и $K(c,d)$ равны в том и только том случае, когда $(a,b) \sim (c,d)$, т. е.

$$(K(a,b) = K(c,d)) \Leftrightarrow ((a,b) \sim (c,d)).$$

Далее во множестве целых чисел введем операции сложения и умножения и покажем, что они коммутативны, ассоциативны и удовлетворяют дистрибутивному закону.

Определение 9.3. *Суммой* двух целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$ называется целое число $K(a+c, b+d)$:

$$K(a,b) + K(c,d) \overset{Df}{=} K(a+c, b+d). \tag{9.4}$$

Покажем, что определенная таким образом сумма не зависит от выбора представителей в классах $K(a,b)$ и $K(c,d)$.

Теорема 9.1. Если $(a_1, b_1) \in K(a,b)$ и $(c_1, d_1) \in K(c,d)$, то $(a_1 + c_1, b_1 + d_1) \in K(a+c, b+d)$.

Доказательство. Поскольку $(a_1, b_1) \in K(a,b)$ и $(c_1, d_1) \in$ $\in K(c,d)$, то $(a_1, b_1) \sim (a,b)$ и $(c_1, d_1) \sim (c,d)$, а это означает, что $a_1 + b = b_1 + a$ и $c_1 + d = d_1 + c$. Складывая эти равенства почленно, получаем $a_1 + c_1 + b + d = b_1 + d_1 + a + c$. Последнее равенство означает, что $(a_1 + c_1, b_1 + d_1) \sim (a+c, b+d)$, т. е. $(a_1 + c_1, b_1 + d_1) \in K(a+c, b+d)$.

Определение 9.4. *Произведением* двух целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$ называется целое число $K(ac+bd, ad+bc)$:

$$K(a,b) \cdot K(c,d) \overset{Df}{=} K(ac+bd, ad+bc). \tag{9.5}$$

Произведение, как и сумма, не зависит от выбора пар в перемножаемых числах.

Теорема 9.2. Если $(a_1, b_1) \in K(a,b)$ и $(c_1, d_1) \in K(c,d)$, то $(a_1 c_1 + b_1 d_1, a_1 d_1 + b_1 c_1) \in K(ac+bd, ad+bc)$.

Доказательство. Как и в теореме 9.1, из того что $(a_1, b_1) \in$ $\in K(a,b)$ и $(c_1, d_1) \in K(c,d)$, следует $a_1 + b = b_1 + a$ и $c_1 + d = d_1 + c$.

Первое из этих равенств умножим на c_1, после чего, прибавив к обеим частям $bd + a_1d_1 + ad$, получим $a_1c_1+b(c_1 + d) + a_1d_1 + + ad = b_1c_1 + a(c_1 + d) + bd + a_1d_1$. Используя равенство $c_1 + + d = d_1 + c$ и группируя члены, находим $a_1c_1 + d_1(b + a_1) + + bc+ad = b_1c_1+ac+ad_1+bd+a_1d_1$. Далее, учитывая равенство $b + a_1 = a + b_1$, будем иметь $a_1c_1 + b_1d_1 + ad + bc = a_1d_1 + b_1c_1 + + ac + bd$. Но последнее равенство означает, что $(a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1) \sim (ac + bd, ad + bc)$ или, что одно и то же $(a_1c_1 + + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1) \in K(fc + bd, ad + bc)$. Тем самым теорема доказана.

Поскольку в определениях операций сложения и умножения целых чисел содержатся только действия сложения и умножения натуральных чисел (см. формулы (9.4), (9.5)), то существование и единственность суммы и произведения целых чисел вытекает из существования и единственности их во множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Доказательства требовала только независимость суммы и произведения от выбора представителей в классах.

Операции сложения и умножения целых чисел обладают следующими свойствами:

1^0. $K(a, b) + K(c, d) = K(c, d) + K(a, b)$ — коммутативность сложения;

2^0. $(K(a, b)+K(c, d))+K(e, f) = K(a, b)+(K(c, d)+K(e, f))$ — ассоциативность сложения;

3^0. $K(a, b)\cdot K(c, d) = K(c, d)\cdot K(a, b)$ — коммутативность умножения;

4^0. $(K(a, b) \cdot K(c, d)) \cdot K(e, f) = K(a, b) \cdot (K(c, d) \cdot K(e, f))$ — ассоциативность умножения;

5^0. $K(a, b) \cdot (K(c, d) + K(e, f)) = K(a, b) \cdot K(c, d) + K(a, b) \times \times K(e, f)$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

Справедливость свойств легко проверить сравнением левой и правой частей равенств. Докажем, например, справедливость дистрибутивности:

$$K(a, b)(K(c, d) + K(e, f)) = K(a, b) \cdot K(c + e, d + f) =$$

$$= K(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be);$$

$$K(a, b) \cdot K(c, d) + K(a, b) \cdot K(e, f) =$$

$$= K(ac + bd, ad + bc) + K(ae + bf, af + be) =$$

$$= K(ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be).$$

Правые части полученных равенств совпадают, тем самым справедливость дистрибутивности установлена. Коммутативность и ассоциативность доказываются аналогично.

Определение 9.5. *Разностью* двух целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$ называется целое число $K(x,y)$, удовлетворяющее условию $K(c,d)+K(x,y)=K(a,b)$.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$K(x,y)=K(a,b)-K(c,d).$$

Действие, с помощью которого находится разность двух целых чисел, называется *вычитанием.*

Теорема 9.3. Разность любых двух целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$ существует и единственна.

Доказательство существования. Определим сначала вид числа $K(x,y)$. По определению 9.5 разности имеем $K(c,d)+K(x,y)=K(a,b)$. По определению 9.3 суммы $K(c,d)+K(x,y)=K(c+x,d+y)$. Таким образом, получаем равенство $K(c+x,d+y)=K(a,b)$. Это равенство равносильно эквивалентности $(c+x,d+y)\sim(a,b)$ или равенству $c+x+b=d+y+a$. Сгруппировав слагаемые в последнем равенстве, перепишем его в виде $x+(c+b)=y+(a+d)$, что означает справедливость эквивалентности $(x,y)\sim(a+d,b+c)$. Следовательно, $K(x,y)=K(a+d,b+c)$.

Покажем теперь, что число $K(a+d,b+c)$ является разностью чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$.

Действительно, $K(c,d)+K(x,y)=K(c,d)+K(a+d,b+c)=K(c+a+d,d+b+c)=K(a+c+d,b+c+d)=K(a,b)$.

Справедливость последнего равенства вытекает из эквивалентности $(a+c+d,b+c+d)\sim(a,b)$.

Итак, существование разности целых чисел доказано.

Доказательство единственности. Предположим, что существуют две разности $K(x,y)$ и $K(u,v)$ целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$. Тогда справедливы равенства:

$K(c,d)+K(x,y)=K(a,b)$; $K(c,d)+K(u,v)=K(a,b)$.

Эти равенства можно переписать в виде:

$K(c+x,d+y)=K(a,b)$; $K(c+u,d+v)=K(a,b)$.

Отсюда следует, что $K(c+x,d+y)=K(c+u,d+v)$, а это равносильно равенству $c+x+d+v=d+y+c+u$ или $x+v=y+u$. Последнее означает, что $(x,y)\sim(u,v)$, т. е. $K(x,y)=K(u,v)$. Тем самым единственность доказана.

Как следует из доказательства теоремы 9.3, разность двух целых чисел $K(a,b)$ и $K(c,d)$ находится по формуле

$$K(a,b) - K(c,d) = K(a+d, b+c).$$

Теорема 9.4. Если целое число $K(a,b)$ таково, что $a = b$, то для любой пары $(c,d) \in K(a,b)$ будет $c = d$.

Если $a > b$, то для любой пары $(c,d) \in K(a,b)$ будет $c > d$.

Если $a < b$, то для любой пары $(c,d) \in K(a,b)$ будет $c < d$.

Доказательство. Пусть $a = b$ и (c,d) — любая пара, входящая в класс $K(a,a)$. Из $(c,d) \sim (a,a)$ следует, $c + a = d + a$ и $c = d$.

Рассмотрим теперь целое число $K(a,b)$, такое, что $a > b$, и пусть $(c,d) \in K(a,b)$. Тогда $a = b + k$, где $k \in \mathbf{N}$, и $a + d = b + c$. Подставив в последнее равенство значение $a = b + k$, получим $b + k + d = b + c$ или $d + k = c$, что означает $c > d$.

Если $a < b$, то для любой пары $(c,d) \in K(a,b)$ можем записать $(c,d) \sim (a,b)$ или $c + b = d + a$, где $b = a + m$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда $c + a + m = d + a$.

Отсюда следует, что $c + m = d$ и значит $c < d$. Теорема доказана.

Определение 9.6. Целое число $K(a,a)$ будем называть *нулем* и обозначать символом 0.

Целое число $K(a,b)$, где $a > b$, будем называть целым *положительным* или *натуральным* числом.

Целое число $K(a,b)$, где $a < b$, будем называть целым *отрицательным* числом.

Таким образом, множество $\mathbf{Z}$ целых чисел разбивается на три класса: множество натуральных чисел; множество отрицательных чисел; множество, состоящее из одного числа нуль.

Натуральное число $K(a+n, a)$ будем обозначать в дальнейшем символом n.

Теорема 9.5. Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами.

Доказательство. Пусть $n = K(a+n, a)$ и $m = K(b+m, b)$ — натуральные числа. Тогда сумма $n + m = K(a+n, a) + K(b+m, b) = K(a+b+m+n, a+b)$ является натуральным числом.

Рассмотрим произведение $nm = K(a+n, a) \cdot K(b+m, b) = K((a+n)(b+m) + ab, (a+n)b + a(b+m)) = K(ab + nb + am + nm + ab, ab + nb + ab + am) = K(2ab + nb + am + nm, 2ab + nb + am) = K(c + mn, c)$, здесь $c = 2ab + nb + am$.

Число $K(c+mn, c)$ является натуральным и, следовательно, справедливость теоремы доказана.

Определение 9.7. Число $K(c,d)$ называется *противоположным* числу $K(a,b)$, если $K(a,b)+K(c,d)=0$.

Число, противоположное $K(a,b)$, обозначается через $-K(a,b)$. Таким образом, знак минус, поставленный перед целым числом, означает переход к противоположному числу.

Согласно определению 9.7, имеем равенство $-K(a,b) + K(a,b) = 0$ или $-K(a,b) + K(a,b) = K(c,c)$. По определению 9.5 разности двух целых чисел можем записать

$$-K(a,b) = K(c,c) - K(a,b) = K(c+b, c+a) = K(b,a).$$

Следовательно, $K(b,a)$ есть число, противоположное числу $K(a,b)$. В частности, целое отрицательное число $K(a, a+n)$ является противоположным натуральному числу $n = K(a+n, a)$. Поэтому отрицательные целые числа будем обозначать в дальнейшем символом $-n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Определение 9.8. *Модулем (абсолютной величиной)* целого числа x называется само это число, если x — натуральное, и число $-x$, если x — целое отрицательное. Модуль нуля равен нулю.

Модуль числа x обозначается через $|x|$. Используя введенное обозначение, определение 9.8 можем записать в виде:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbf{N}; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x = -n, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases}.$$

Далее рассмотрим ряд свойств целых чисел.

1^0. $-n = (-1)\cdot n$;

2^0. $(-1)\cdot(-1) = 1$;

3^0. $-(-n) = n$;

4^0. $(-n)\cdot(-m) = n\cdot m$;

5^0. $(-n)\cdot m = -n\cdot m$;

6^0. $n - m = n + (-m) = -(m-n)$;

7^0. $(-n) + (-m) = -(n+m)$;

8^0. $-0 = 0$.

Докажем, например, справедливость свойств 1^0 и 4^0. По определению $-1 = K(a, a+1)$, $n = K(b+n, b)$. Тогда $(-1)\cdot n = K(a,a+1)\cdot K(b+n,b) = K(a(b+n)+b(a+1), ab+(a+1)(b+n)) = K(2ab+an+b, 2ab+an+b+n) = K(c, c+n) = -n$.

Здесь $c = 2ab + an + b$. Тем самым доказано, что $(-1) \cdot n = -n$.

Справедливость свойства 4^0 вытекает из свойств 1^0 и 2^0, так как $(-n) \cdot (-m) = (-1) \cdot n \cdot (-1) \cdot m = (-1) \cdot (-1) \cdot n \cdot m = 1 \cdot n \cdot m = n \cdot m$. Остальные свойства доказываются аналогично.

В дальнейшем будем говорить, что натуральное число имеет знак плюс $(+)$, а отрицательное — знак минус $(-)$.

Из свойств 1^0 — 8^0 легко выводятся правила сложения и умножения целых чисел.

Правило сложения. При сложении двух целых чисел одного и того же знака получается число того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых.

При сложении чисел с разными знаками получается число, знак которого совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль, а модуль равен разности модулей слагаемых.

Сумма противоположных чисел равна нулю, а сложение с нулем не меняет числа.

Правило умножения. При умножении двух целых чисел получается число, модуль которого равен произведению модулей множителей, а знак положителен, если знаки множителей одинаковы, и отрицателен, если множители имеют противоположные знаки.

Если хотя бы один из множителей равен нулю, то произведение равно нулю.

9.1.3. Свойства множества целых чисел

На множестве целых чисел $\mathbf{Z}$, так же как и на множестве $\mathbf{N}_0$ целых неотрицательных чисел, определим бинарное отношение «меньше».

Определение 9.9. Говорят, что целое число x меньше целого числа y (пишут $x < y$), если существует такое натуральное число k, что выполняется равенство $x + k = y$.

В символах математической логики определение 9.9 имеет вид:

$$(x < y) \overset{Df}{\Longleftrightarrow} (\exists k \in \mathbf{N})(x + k = y).$$

Если число x меньше числа y, то говорят, что y больше x, и пишут $y > x$. Запись $x \leq y$ означает, что x меньше или равняется y (x не больше y), а запись $x \geq y$, в свою очередь, означает, что x больше или равняется y (x не меньше y).

Теорема 9.6. Для любых $x, y \in \mathbf{Z}$ имеет место точно одно из трех соотношений: $x < y$; $x = y$; $y < x$.

Доказательство. Рассмотрим разность $x - y$. Согласно теореме 9.4 и определению 9.6, она может быть числом отрицательным, равным нулю или положительным. Если разность $x-y$ есть число отрицательное, то число $-(x - y) = y - x = k$ является положительным и, следовательно, по определению 9.5 разности $x + k = y$, т. е. $x < y$.

Если $x - y = 0$, то очевидно, что $x = y$.

Если же $x - y$ — положительное число, то можем записать, что $x-y = k$, $k \in \mathbf{N}$. Но тогда по определению разности $x = y+k$, или $x > y$. Теорема доказана.

Как и на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbf{N}_0$ (см. подразд. 6.4), отношение «меньше» на множестве $\mathbf{Z}$ является отношением строгого линейного порядка, а значит, $\mathbf{Z}$ — линейно упорядоченное множество.

Кроме того, множество $\mathbf{Z}$ бесконечное, так как содержит бесконечное подмножество $\mathbf{N}_0$. Легко показать, что $\mathbf{Z}$ — дискретное множество, в нем выполнены принцип наибольшего (наименьшего) числа и свойство Архимеда.

Всеми указанными свойствами обладает и множество $\mathbf{N}_0$ целых неотрицательных чисел. Однако в отличие от множества $\mathbf{N}_0$ множество $\mathbf{Z}$ не содержит наименьшего числа. Действительно, для всякого $x \in \mathbf{Z}$ существует число $x - 1 \in \mathbf{Z}$, которое будет меньше, чем x.

Итак, множество $\mathbf{Z}$ целых чисел обладает следующими свойствами: оно бесконечное, линейно упорядоченное, дискретное и в нем нет наибольшего и наименьшего чисел.

Как уже отмечалось в подразд. 5.2, множество целых чисел $\mathbf{Z}$ образует группу относительно операции сложения. Кроме того, по свойствам 3^0, 4^0 и 5^0 операций сложения и умножения множество $\mathbf{Z}$ является коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей. Однако множество $\mathbf{Z}$ не является полем, поскольку не выполняется условие существования обратного элемента.

Для геометрической интерпретации целых чисел возьмем произвольную прямую l и точку O на ней. Точка O делит прямую на два луча, один из которых назовем положительным (правым), а другой — отрицательным (левым). Выберем произвольный отрезок e и будем считать его единичным отрезком, или единицей измерения длины. От точки O на положительном луче (вправо) отложим отрезок $OA = ne$, являющийся суммой n единичных отрезков. Точке A на прямой поставим в соответствие натуральное число n (рис. 9.1).

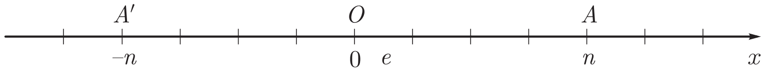

Рис. 9.1

Рис. 9.2

Откладывая отрезок $OA' = ne$ ($n \in \mathbf{N}$) от точки O на отрицательном луче (влево), найдем на прямой l точку A', которой поставим в соответствие отрицательное число $-n$. Точке O поставим в соответствие число нуль.

Таким образом, каждому целому числу x ставится в соответствие точка M прямой l, отстоящая от точки O на $|x|$ единиц и расположенная на правом луче, если x — положительное, и на левом, если x — отрицательное число.

Число x, соответствующее точке M, называется координатой этой точки. Тот факт, что точка M имеет координату x, будем записывать в виде $M(x)$.

Изображение целых чисел с помощью точек прямой позволяет задавать не только длины отрезков, но и указывать их направление. Следовательно, геометрически целое число — это направленный отрезок, лежащий на прямой l и выходящий из точки O.

Вышеуказанные свойства множества целых чисел иллюстрируются на числовой прямой (рис. 9.2).

Упражнения

1. Найдите натуральные числа x, y, z, такие, что:
$(1, x) \sim (x, 5)$, $(6, 2y) \sim (y, 9)$, $(3z, 1) \sim (7, z)$.

2. Найдите натуральное число x, такое, что $(x^2, x) \sim (4x, 6)$.

3. Докажите коммутативный и ассоциативный законы сложения и умножения целых чисел.

4. Докажите, что на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ умножение дистрибутивно относительно вычитания.

5. Докажите, что для любой пары (a, b) и любого натурального числа n выполняются отношения:
$(a, b) + (n, n) \sim (a, b)$; $(a, b) \cdot (n, n) \sim (m, m)$; $(a, b) \cdot (n + 1, n) \sim (a, b)$.

6. Найдите пару (x, y), такую, что $(a, b) + (x, y) \sim (c, d)$.

7. Докажите, что неравенство $|x| < a$ равносильно неравенству $-a < x < a$.

9.2. Рациональные числа

9.2.1. Понятие дроби

Продолжая процесс расширения понятия числа, мы приходим к необходимости рассмотрения дробей. Так как на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ выполнимы только операции сложения, умножения и вычитания, то даже простейшее уравнение вида

$$b \cdot x = a, \tag{9.6}$$

где a и b — целые числа и $b \neq 0$, не всегда разрешимо в этом множестве.

Поскольку появление дробей исторически связано с измерением величин, рассмотрим необходимость их введения на примере измерения длин отрезков.

Пусть дан произвольный отрезок c и единичный отрезок e. Если отрезок e укладывается в отрезке c целое число раз (например, n раз), то результат измерения выражается натуральным числом n. В этом случае пишут $c = ne$.

Однако чаще единица длины e в измеряемом отрезке c не укладывается целое число раз. Поэтому для выражения результата измерения приходится расширять запас чисел, вводя числа, отличные от целых. В таком случае мерой отрезка c будет неизвестное число x, отличное от целого и удовлетворяющее условию

$$c = x \cdot e. \tag{9.7}$$

Если попытаться перейти к более мелкой единице измерения, то иногда удается найти такой отрезок e_1, который укладывается целое число раз как в отрезке e, так и в отрезке c (рис. 9.3).

Тогда отрезки c и e называются *соизмеримыми* и имеют место равенства:

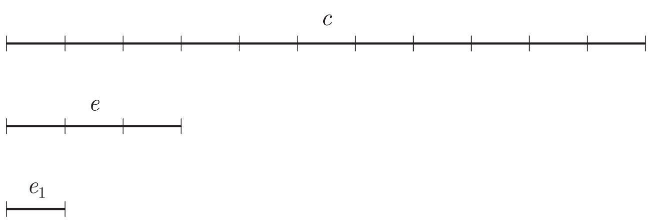

Рис. 9.3