ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Н. В. КОРНЕЕВ, Ю. С. КУСТАРЁВ, Ю. Я. МОРГОВСКИЙ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРАКТИКУМОМ

Допущено
Учебно-методическим объединением по образованию
в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности «Автомобиле- и тракторостроение»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2008

УДК 681.518.52(075.8)
ББК 39.17я73
К672

Рецензенты:
зав. кафедрой «Автоматика и процессы управления» МГТУ «МАМИ»,
канд. техн. наук, проф. *В.И.Харитонов*;
зав. кафедрой «Информационные технологии в экономике» МГТУ «МАМИ»,
д-р техн. наук, проф. *Н.Т.Катанаев*;
профессор ГОУ ВПО «Российский университет дружбы народов» (РУДН),
д-р техн. наук *В.М.Фомин*

Корнеев Н.В.
К672 Теория автоматического управления с практикумом : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Н.В.Корнеев, Ю.С.Кустарёв, Ю.Я.Морговский. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 224 с.
ISBN 978-5-7695-4274-9

Приведены основные сведения по теории автоматического управления в технических системах. Рассмотрены современные методы описания систем автоматического управления, структурные подходы к синтезу стохастических систем, в том числе управление с наблюдателем, вопросы машинных исследований в фазовом пространстве. Описаны алгоритмы реального времени, использующие корневые методы и методы модальной теории, и перспективные алгоритмы адаптивного типа.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть полезно специалистам.

УДК 681.518.52(075.8)
ББК 39.17я73

ISBN 978-5-7695-4274-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная теория управления рассматривает систему человек—окружающий мир и отдельные части этой сложной системы как объекты изучения с возможностью результативного воздействия на них. Назовем интересующую нас часть окружающего мира *объектом управления* и будем характеризовать положение этой части термином «*состояние объекта*», а термином «*управление*» — целенаправленное изменение состояния объекта и способ достижения в нем определенных целей. Таким образом, объект управления — это любое явление окружающего мира (или сам субъект), которое рассматривается с точки зрения создания некоторого целенаправленного движения. Естественно назвать конечное состояние объекта *желаемым*, т. е. таким, в котором мы заинтересованы и которое определяет *цель управления* как перевод объекта в желаемое состояние, а сам акт перевода — *процессом управления* или просто *управлением.*

Автоматическое управление — это изменение состояния объекта в системах, где за человеком сохранены только целеуказывающие функции, а остальные заменены действием специальных устройств (устройств автоматического управления).

Окружающий мир воздействует на объект управления самым разным (случайным) образом, чаще всего не направленным к желаемому состоянию. Эти возмущающие воздействия называют *возмущениями.* В отличие от них воздействия, создаваемые искусственно с целью приблизить желаемое состояние, называют *управляющими воздействиями.* В конце концов управляющие воздействия должны преодолевать действие возмущений. На создание управляющих воздействий расходуются какие-то ресурсы. Решая задачу минимизации расходования этих ресурсов, стремятся к *экономичному управлению.* При этом *точность управления* характеризует отклонения состояния, достигнутого в результате управляющего воздействия, от желаемого. Экономичное и точное управление называют *оптимальным* или наилучшим по отклонениям и расходу ресурсов (при этом ресурсы следует соразмерить — дать оценку относительной значимости каждого из этих составляющих управления).

Глобальный *принцип обратной связи* заключается в том, что для управления любым объектом нужна информация о состоянии этого объекта, чтобы предусмотреть степень влияния конкретного состояния объекта на управляющее воздействие. Кроме того, необходимо предвидеть и будущие состояния объекта, которые могут возникнуть в результате управления. Если известны закономерности движения объекта, то становится возможным *управление с предикцией*, т.е. с предвидением его результатов. Поэтому в теории управления исключительно важное место занимает изучение законов, определяющих движение объектов.

В управлении неразделимо решаются две задачи:

• *анализа* — определения характера движения при известной (существующей) системе управления и разных условиях (возмущениях);

• *синтеза* — создания системы управления, обеспечивающей при разных условиях заданное движение объекта.

Накопление технических достижений и совершенствование аппаратных средств в течение второй половины XX в. создали принципиально новую ситуацию в теории управления. Много лет в ней происходило накопление косвенных методов анализа и синтеза. Достижение уровней 0,1 MFlops для промышленных систем логического управления и 1—10 MFlops для интеллектуальных систем обеспечило переход к новым методам и средствам теории. В настоящее время сложности в определении корней характеристического уравнения в реальном масштабе времени исключены. Это создает возможности для текущей идентификации и адаптивного управления достаточно сложными объектами.

Теория управления развивалась адекватно этим достижениям. Качественная теория дифференциальных уравнений и методы фазового многомерного пространства были уже подготовлены для решения ряда вопросов машинной графики. В то же время такие общие разработки теории систем, как управляемость, наблюдаемость, оптимальное управление, были подготовлены для новых возможностей управляющих ЭВМ. Теория стохастических систем и теория оценивания также упредили те вопросы, которые возникли при решении задачи управления в реальных условиях объектами с изменяющимися параметрами и в условиях интенсивных помех.

Ограниченность технических средств управления вызывала в прошлом подход, при котором требования к управлению формулировались в общем (и часто компромиссном) виде. Известным примером могут служить так называемые компромиссные настройки регуляторов. Допущения, обусловленные возможностями математических методов, также оказывали существенное влияние на формулирование задач управления. Накопленный опыт эксплуатации промышленных регуляторов, выполненных на простой алгоритмической основе, приводил к выводу о необходимости поступиться качеством процессов одного типа, чтобы получить удовлетворительное качество других показателей. Примером могут служить противоречия между быстродействием и колебательностью, статической точностью и устойчивостью и т. д.

Таким образом, актуальность и необходимость данного учебного пособия определяются значением теории автоматического управления в современном машиностроении и тем влиянием, которое оказывают автоматические системы управления в обеспечении надежности и безопасности технических объектов.

Представленный в учебном пособии материал ориентирован на современный подход к обучению студентов по дисциплине «Теория автоматического управления». Следует также отметить наличие в учебном пособии лабораторных работ, ориентированных на использование цифровой техники и программной оболочки MATLAB Simulink.

В данном учебном пособии приведены основные сведения по теории автоматического управления в технических системах: фундаментальные принципы управления; работа систем автоматического управления; типовые звенья систем автоматического управления и их переходные характеристики; статические и астатические системы; частотные характеристики звеньев и систем; понятия сходимости решения и устойчивости систем; оценки качества систем; теория оптимального управления; автоматические регуляторы. Рассмотрены современные методы описания систем автоматического регулирования в пространстве состояний, в форме уравнений в конечных разностях, в терминах теории нечетких множеств. Изложены вопросы машинных исследований в фазовом пространстве и структурные подходы к синтезу стохастических систем. Описаны алгоритмы реального времени и перспективные алгоритмы адаптивного типа.

Глава 12 написана совместно с Дударевой В. Ю. (Высшая школа экономики, г. Москва).

Учебное пособие может быть использовано при обучении специалистов по направлениям «Автоматизация и управление», «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», «Мехатроника и робототехника», «Энергомашиностроение», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

ГЛАВА 1
ИСХОДНОЕ ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Описание объекта управления в пространстве состояний

Любой объект может быть достоверно охарактеризован некоторой совокупностью переменных. Рассмотрим простой пример: стационарное положение точки в геометрическом (трехмерном) пространстве определяется тремя ее проекциями на координатные оси этого пространства. Если эти переменные известны в некоторый момент времени и известны проекции скорости точки на координатные оси, то можно вычислить положение точки в следующий момент времени. Под действием управляющего воздействия можно изменить величину и направление скорости движения точки как объекта в нужное место пространства. Общее число переменных состояния объекта в этом примере оказывается равным шести.

Чем сложнее объект, тем большее число переменных характеризует его состояние. Принято называть такой набор переменных *вектором состояния объекта* и записывать его в виде

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $\boldsymbol{X}$ — n-мерный вектор состояния объекта с проекциями x_i; $i = 1, ..., n$; n — размерность объекта (пространства его состояния).

Можно рассматривать проекции x_i как координаты некоторого n-мерного пространства, названного для краткости *пространством состояний объекта*. В этом пространстве по аналогии с трехмерным легко представить переход объекта в новое состояние просто как изменение его положения.

Пространство состояний характеризуется многими полезными свойствами, которые позволяют решать сложные динамические задачи управления, анализа и синтеза многомерных систем управления, все эти задачи будут рассмотрены далее в соответствующих главах.

1.2. Дифференциальные уравнения в форме Коши

Одной из наиболее наглядных и имеющих системное значение форм описания движения объекта управления является система дифференциальных уравнений Коши:

$$d\boldsymbol{X}/dt = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, t), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{U}$ — вектор управляющих воздействий размерностью $m \le n$; m — число внешних возмущений; $\boldsymbol{F}$ — вектор возмущающих воздействий размерностью r, которая не зависит ни от n, ни от m:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix}; \tag{1.3}$$

t — скалярный аргумент, в качестве которого обычно рассматривается время.

Выражение (1.2) имеет определенный физический смысл: *скорость изменения состояния* объекта (вектор $d\boldsymbol{X}/dt$) полностью определяется его текущим состоянием (вектором $\boldsymbol{X}$) и воздействиями, приложенными к объекту.

Формулу (1.2) называют векторно-матричной, по существу это сокращенная форма записи дифференциальных уравнений движения объекта (изменения состояния объекта). Объекты и устройства управления составляют *систему управления*.

Управляющее воздействие $\boldsymbol{U}(t)$ на объект системы управления должно обеспечить необходимое движение (изменение состояния) объекта в виде $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{Z}(t)$, где $\boldsymbol{Z}(t)$ — заданный характер движения объекта.

В системах автоматического управления роль человека в основном сводится к постановке задач управления, в частности к заданию функции $\boldsymbol{Z}(t)$.

Вектор-функция в правой части уравнения Коши представляет законы движения объекта:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Принципиально важно, чтобы число уравнений n в уравнении (1.4) совпадало с размерностью вектора состояния $\boldsymbol{X}$. Невыполнение этого условия означает, что какие-то законы движения объекта остаются неизвестными.

Уравнения Коши в полной (развернутой) форме получаются подстановкой в уравнения (1.2) векторов переменных $\boldsymbol{X}$ из уравнения (1.1), $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{F}$ из уравнений (1.3) и вектор-функции $\boldsymbol{\Phi}$ из уравнения (1.4):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n, f_1, f_2, ..., f_r, u_1, u_2, ..., u_m, t); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n, f_1, f_2, ..., f_r, u_1, u_2, ..., u_m, t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n, f_1, f_2, ..., f_r, u_1, u_2, ..., u_m, t). \end{cases} \tag{1.5}$$

Вектор-функции в правой части описывают любые зависимости от координат $\boldsymbol{X}$ и действующих сил $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{F}$, в том числе нелинейные, кусочно-непрерывные, разрывные, не образующие замкнутых множеств аргументов и т. д. Такие объекты (или системы) называют *нелинейными*.

Рассмотрим *расширенное пространство состояний объекта*. Возможны случаи, когда независимые векторы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{F}$ описываются в форме, подобной системе (1.5): известны законы, по которым формируются управляющие и возмущающие воздействия на объект. В этом случае целесообразно объединить эти векторы с вектором $\boldsymbol{X}$ в один: $\boldsymbol{V}(t) = \{\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{U}(t),\ \boldsymbol{F}(t)\}$. Кроме того, время t может быть включено в состав переменных состояния $t = x_{n+1}$ введением в систему (1.5) еще одного дифференциального уравнения: $dx_{n+1}/dt = 1$. В результате общая размерность уравнений q определяется из соотношения

$$n + m + r = q.$$

Именно такую размерность будет иметь объединенная система уравнений вида, подобного системе (1.5) и именно таково будет общее число переменных, которые в нее входят. Такое объединение называют описанием в расширенном пространстве состояний, т. е. в таком пространстве, где собственно состояния объекта дополняются внешними (управляющими и возмущающими) воздействиями, которые и определяют возмущенное движение объекта. Главное при этом состоит не в более краткой форме записи уравнений движения, а в полноте математического описания движения объекта (полноте причинно-следственных связей, определяющих это движение). По смыслу возмущающие воздействия являются внешними по отношению к объекту управления (следствиями «своих» процессов в «своих» объектах), а управляющие могут различным образом формироваться в системе управления.

1.3. Другие формы первичного описания объекта

Интегральное уравнение систем управления. Интегральное векторно-матричное уравнение непосредственно вытекает из уравнения Коши (1.2), если сначала записать его в форме бесконечно малого приращения (дифференциала) состояния $d\boldsymbol{X}(t)$:

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, t)dt. \tag{1.6}$$

Это позволяет перейти к конечному состоянию $\boldsymbol{X}(t)$ путем вычисления интеграла за всю историю процесса или на некотором интервале от предыдущего состояния $\boldsymbol{X}(t_k)$:

$$\boldsymbol{X}(t_{k+1}) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}, t)dt; \quad \boldsymbol{X}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{U}, t)dt.$$

Таким образом, в отличие от дифференциальной формы интегральное уравнение движения объекта характеризует зависимость его текущего состояния от предыстории процесса.

Форма дискретных приращений. Следствием формы (1.6) является форма дискретных приращений (конечных разностей), широко используемая при применении вычислительной техники для решения задач управления. При этом можно считать, что для малого приращения аргумента на некотором интервале справедливо соотношение

$$\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, t)\Delta t. \tag{1.7}$$

Выражению (1.7) можно сопоставить изменение положения объекта в расширенном пространстве состояний и тогда на основании (1.7) получим

$$\Delta\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{V}, t)\Delta t.$$

Для расширенного пространства состояний можно перейти от глобального времени t к локальному («объектному») времени, используя операцию целочисленного деления с отбрасыванием остатка, как это предусматривается для ряда типов ЭВМ (запись операции обозначим //):

$$\mathrm{t}//T = i,$$

где i — наибольшее число периодов ($T = \mathrm{const}$), которые содержатся в глобальном времени t.

Тогда «объектное» время t получается из глобального вычитанием:

$$t = \mathrm{t} - iT. \qquad (1.8)$$

Эта операция «деглобализации» имеет достаточно простой смысл: необязательно отсчитывать время для данного объекта «от Рождества Христова». Обычно отсчет времени начинают от некоторого фиксированного момента старта в глобальном времени. Например, спутник запущен в 05 часов 11 секунд 30 мая 2006 г. На 7-й секунде полета отработала 1-я ступень двигателя ракеты, траектория полета — расчетная. При этом (и в дальнейшем) расчет траектории выполнен в объектном времени. Именно объектное время является основой построения математических моделей, а для систем с ЭВМ — алгоритмов управления.

Как будет показано далее, операция преобразования времени (1.8) в ряде случаев существенно упрощает рассмотрение процессов управления.

1.4. Лингвистическая форма и теория нечетких множеств

В 1964 г. выдающийся американский математик Лотфи Заде опубликовал статью под названием «Fuzzy Sets» («Нечеткие множества»), давшую начало новому разделу математики, значительно сблизившему математику с реальным миром. Теория нечетких множеств, в числе многих других возможностей, позволяет для теории управления осуществить:

- алгоритмизацию процессов управления на основе простых описаний действий (внешне даже нематематических);
- ограничить роль методов теории вероятности, использование которых основано на законе больших чисел, что для однократного процесса управления не может считаться достоверным.

Такая форма, т.е. описание закона движения (или иначе алгоритма) в словесной форме, полезна в тех случаях, когда математическая форма не установлена либо отличается сложностью, например размытостью области определения (нечеткими множествами описания функциональных зависимостей).

Если говорить об объекте с точки зрения управления, то существуют два принципиально разных подхода.

Согласно первому (аналитическому) составляется точное математическое описание движения объекта. Из этого описания вытекает закон управления как функция времени и его системная (аппаратная) реализация.

Согласно второму необходимо составить таблицу правил, определяющих алгоритм управления в виде: «если состояние объекта такое... то нужно провести действия управления такие-то» (т. е. алгоритмически-программный).

Эта теория, иначе называемая нечеткой логикой, получила развитие благодаря тому, что традиционная логика, использующая понятия *истинно/ложно*, часто не может быть приемлемой в ситуациях, в которых имеет место множество неоднозначностей или неточностей. Нечеткая логика позволяет описывать на повседневном языке исполнение решений или управлять действиями без решения сложных уравнений. Наиболее часто это используется для сложных приложений как альтернатива аналитическому управлению.

Нечеткая логика допускает использование выражений типа «довольно низкого уровня» или «довольно быстро». Это является основой для проведения технического анализа в том первичном виде, в каком протекает процесс управления.

Нечеткая логика достигает этого посредством интерполирования между граничащими зонами, описанными набором нечетких правил *если/тогда* (предпосылка/действие). Для сложных приложений такая характеристика интерполяции означает, что можно описать поведение системы с меньшим количеством правил, чем требуется для обычной дискретной логики. Например, такое описание в приложении Motorola было переделано из 16 000 строк традиционного кода в 30 нечетких правил.

Нечеткие правила состоят из функций, каждая из которых определяет исходную точку, которую система использует для различения между такими режимами процесса, как «низкий уровень», «нормально» и «высоко». Точный математический алгоритм обрабатывает такие нечеткие правила, но нечеткий системный разработчик просто и интуитивно конфигурирует функции членства (или принадлежности), используя такие геометрические формы, как треугольники или трапеции. Функции точного членства для каждой переменной охватывают диапазон, который системный разработчик строго относит к каждому режиму. Неопределенность вводится выбором конфигурации перекрытия между смежными режимными областями.

При обработке набора входных величин система активизирует несколько правил принадлежности. Область, на которую распространяется каждое из правил, основана на общей оценке степени уверенности для этой принадлежности. Уверенность, или степень принадлежности, оценивается числом, заключенным между 0 и 1. Чтобы прийти к итоговому заключению, нечеткая система использует эти величины для совместного рассмотрения активизированных правил.

Таким образом идентифицируется нечеткое состояние объекта, т. е. состояние объекта относится к некоторому подпространству (классу, режиму). Лицу (устройству), вырабатывающему решение, должен быть известен алгоритм управления, соответствующий выделенному состоянию.

Рассмотрим в качестве простого примера управление температурой воды в ванне. Это и будет объект в терминологии нечетких множеств. Разделим состояния этого объекта на нечеткие области и для каждой области примем один алгоритм (решающее правило) в следующей форме:

1. Если вода очень горячая, то нужно закрыть кран горячей воды и открыть кран холодной воды.
2. Если вода горячая — приоткрыть кран холодной воды.
3. Если вода теплая (желаемая) — сохранить состояние кранов.
4. Если вода прохладная — приоткрыть кран горячей воды.
5. Если вода холодная — закрыть кран холодной и открыть кран горячей воды.

Из этого вытекает принцип построения решающего правила, в сущности совпадающий с логическими условиями ветвления в обычных алгоритмах.

Для многомерных объектов принято говорить о части состояния как об одной координате многомерного пространства.

Для некоторой (заданной) комбинации частей состояния может быть сформирована часть заключения (решающее правило).

Идентификация состояния объекта означает установление его принадлежности к некоторой области пространства. Вектор состояния объекта располагается в некоторой точке, для которой определяется алгоритм (решающее правило).

1.5. Методы экспериментального исследования динамических систем

Термин «идентификация» для теории нечетких множеств имеет смысл идентификации состояния объекта, из которого следует алгоритм управления. При этом природа объекта и уравнения его движения могут оставаться неизвестными. Для объекта с абсолютно неизвестными свойствами Н. Винер ввел понятие «черный ящик». Чем менее изучено явление, тем более его сходство с «черным ящиком».

Однако знание математического описания (законов изменения состояния) позволяет более эффективно управлять объектом. Опыт экспериментальных исследований и прежде всего экспериментальной физики позволил построить систему методов изучения объектов управления, которую можно назвать *идентификацией математического описания.* Суть идентификации описания состоит в том, что объекту неизвестной природы после определенной процедуры изучения приписываются свойства вполне известного объекта.

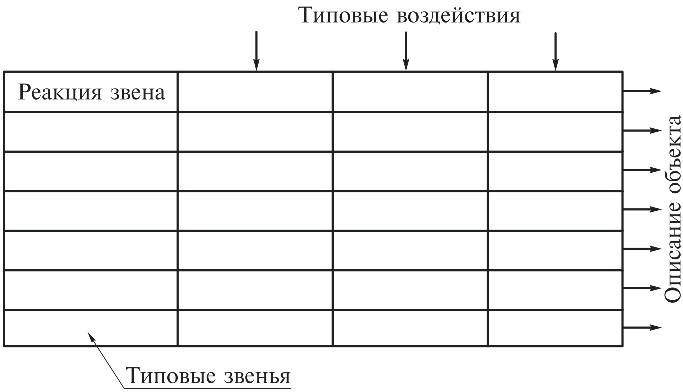

Рис. 1.1. Построение идентификационной таблицы для объекта типа «черный ящик»

Проблемой такой идентификации еще в XIX в. занимался Дж. Максвелл. Он предложил каждый изучаемый объект разделить на простейшие составные части, причем так, чтобы передача воздействий происходила только со входа и только к выходу (звенья направленного действия). При этом должны соблюдаться следующие правила.

1. Имеется (создан) набор типовых воздействий.
2. Отобран набор типовых объектов (звеньев) с известным описанием.
3. Создана таблица реакций типовых звеньев на типовые воздействия.
4. Имеются инструментальные средства экспериментального исследования.
5. Производится типовое воздействие на «черный ящик» и фиксируется реакция на это воздействие.
6. Сравнивается реакция «черного ящика» на типовое воздействие с табличными реакциями типовых звеньев и ему присваивается описание звена с совпадающими реакциями.

Алгоритм идентификации поясняет рис. 1.1.

1.6. Типовые воздействия и реакции на них

Единичный импульс (функция Дирака, или дельта-функция). Введем функцию времени:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Дополним это определение следующими условиями:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1; \qquad \int_{0}^{\infty} \delta(t)dt = \frac{1}{2}; \qquad \int_{-\infty}^{0} \delta(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Реакция на такой единичный импульс носит название *весовой функции* $W(\tau, t)$. Два аргумента, от которых зависит эта функция, означают, что весовая функция $W(\tau)$ от локального аргумента может изменяться в глобальном времени. Название «весовая функция» поясняет рассмотрение суммарной реакции в момент времени t_i, которая образуется из реакций $W(t_i - t_1) + W(t_i - t_2) + W(t_i - t_3)$, представляющих собой относительный вклад (весовой коэффициент) от каждого из прошедших импульсов.

Единичный импульс был впервые введен П. Дираком для отображения силового воздействия при соударении идеально неупругих (недеформируемых) шаров.

Единичная ступенчатая функция. Математическое описание единичной ступенчатой функции имеет вид

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Обычно такая функция используется при рассмотрении процессов включения. Форма ее показана на рис. 1.2, там же приведена выходная реакция, которая называется переходной функцией или переходным процессом и обозначается $h(t)$. Единичный импульс и ступенчатая функция связаны между собой следующим соотношением:

$$\frac{d}{dt} 1(t) = \delta(t).$$

Такое соотношение дает возможность использовать эти функции при различных вычислениях. Оба вида рассмотренных типовых воздействий имеют один и тот же недостаток: при подаче их на вход на выходе будет получена реакция, которая существенно отличается от входного воздействия.

Экспоненциальное воздействие. Чтобы получить реакцию, подобную входному воздействию, нужно на вход объекта подать воз-

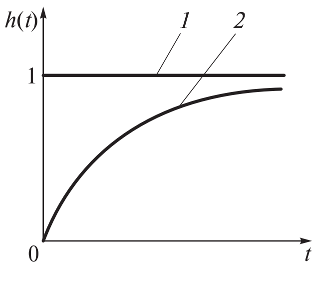

Рис. 1.2. Единичная ступенчатая функция и переходный процесс:

1 — единичная ступенчатая функция; *2* — переходная функция мущение, описываемое экспонентой: $X_{вх}(t) = c_0 e^{st}$. В результате, согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, получим сумму экспонент вида $X_{вых}(t) = c_1 e^{st}$. Реакция на экспоненциальное воздействие имеет коэффициент, зависящий от параметра s и называемый передаточной функцией, т. е. $X_{вых}(t) = W(s) X_{вх}(t)$, если $X_{вх}(t) = e^{st}$.

Гармоническое воздействие. В соответствии с формулой Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

т. е. гармоническая функция в области комплексных чисел связана с экспоненциальной функцией.

Если на вход динамической системы подать сигнал вида $X_{вх}(t) = X_{вх m} \sin \omega t$, то на выходе получим $X_{вых}(t) = X_{вых m} \sin(\omega t + \varphi)$.

Такой вид входного воздействия длительное время считался наиболее удобным для исследований и получил достаточно широкое распространение. Для снятия частотных характеристик нужно изменять частоту синусоиды ω, фиксировать амплитудную характеристику как отношение выходной амплитуды к входной, а также фазовый сдвиг. Так как изменять частоту от 0 до ∞ невозможно, выбирается некоторый частотный интервал, в котором свойства исследуемого объекта проявляются наиболее сильно (так называемая область существенных частот).

В вычислительных методах удобнее использовать амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ): $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\omega t}$. Ее графическая форма приведена на рис. 1.3.

В литературе, ориентированной на аналитические методы, значительное место уделяется логарифмическим частотным характеристикам. Если использовать логарифмический масштаб, то происходит сжатие оси частот в области больших значений и растяжение в области малых значений, т. е. увеличивается охват частотного диапазона. Принятая единица частотного интервала, определяемая при изменении частоты в 10 раз, называется *декада*. Фазовую характеристику можно строить непосредственно откладывая фазовый сдвиг $\varphi(\log \omega)$ — получится логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ). Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ), логарифмической амплитудной характеристики (ЛАХ) используется

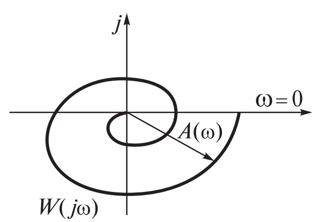

Рис. 1.3. Примерная форма амплитудно-фазовой частотной характеристики:

ω — частота; j — комплексная ось; $A(\omega)$ — модуль частотной передаточной функции; $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция выражение $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$. Единица измерения «децибел» выбрана в результате перехода от отношения мощности к отношению уровней сигналов (степень 2). Основная единица, названная бел, получается слишком крупной и поэтому делится на 10.

1.7. Основные понятия теории графов

Любое исследование связано с построением моделей, объясняющих известные факты и позволяющих находить эффективные решения поставленных задач.

Под *моделью* понимается такая мнимо составляемая, реальная система, которая, отображая объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение позволяет получить достоверную информацию об объекте.

Теорией основного структурного моделирования объектов управления и управляющих систем является теория графов. Графы представляют собой некоторую абстрактную структуру, используемую в ряде разделов теории систем для описания состояний (узлов) и переходов (алгоритмов, зависимостей, потоков и т. д.). Любая система, предполагающая наличие дискретных состояний (узлов) и переходов между ними, может быть описана *графом*.

Соединения между узлами графа называются *ребрами*.

Неориентированный граф — набор точек (вершин), некоторые из которых соединены линиями (ребрами). Неориентированный граф можно считать частным случаем ориентированного графа, в котором для каждой стрелки существует обратная. Особенностью ребер графа является произвольно сложная форма его описания.

Связной компонентой вершины I называется множество всех тех вершин, в которые можно попасть из I, идя по ребрам графа.

Ребром может быть прямая или кривая линия. Ребра не могут иметь общих точек кроме вершин (узлов) графа. Замкнутая кривая в множестве E может иметь только одну точку из множества V, а каждая незамкнутая кривая в E имеет ровно две точки множества V.

Если V и E — конечные множества, то и соответствующий им граф называется *конечным*. Граф называется *вырожденным*, если он не имеет ребер.

Параллельными ребрами графа называются такие, которые имеют общие узлы начала и конца.

Графы отображаются в пространстве множеством точек и соединяющих их линий или векторов. При этом грани могут отображаться и кривыми линиями, а их длина не играет никакой роли. Очертанием графа считается любая топологически связанная область, ограниченная ребрами графа. Неориентированный граф G

называется *связанным*, если для любых двух узлов x, y принадлежащих V, существует последовательность ребер из набора E, соединяющих x и y. Граф G связан тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества V_1 и V_2 так, чтобы обе граничные точки каждого ребра находились в одном и том же подмножестве.

Число ребер, исходящих из вершины (петля учитывается дважды), называется *степенью вершины* $\delta(V)$. В конечном графе число вершин с нечетной степенью всегда четно.

Граф называется *обыкновенным*, если он не содержит петель и параллельных ребер. Граф называется *полным*, если любые две вершины являются смежными. Если для всех вершин $\delta(V) = k$, то граф называется однородным графом степени k или k-однородным.

Конечная последовательность ребер графа e_1, e_2, ..., e_n называется *маршрутом* длины n. Маршрут называется *замкнутым*, если вершины начала и конца маршрута совпадают. Если ребра, образующие маршрут, различны, то такой маршрут называется *цепью.* Если узлы графа могут быть соединены несколькими путями, то сеть, описываемая таким графом, обладает повышенной надежностью. В линейной теории управления описания ребер представляются линейными соотношениями.

ГЛАВА 2

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Метод фазовой плоскости

Понятие динамической системы является весьма широким и охватывает явления любой природы: физической, химической, биологической, экономической и др. Модель динамической системы основана на понятии состояния S в некоторый момент времени и оператора T, определяющего изменение этого состояния. Оператор T указывает процедуру, выполняя которую можно по описанию $X(t)$ найти описание $X(t + \Delta t)$ системы, например, в следующий момент времени $t + \Delta t$. Если оператор T не зависит явно от времени, то система называется *автономной*, в противном случае — *неавтономной*. Состояние системы представляется как точка многомерного пространства координат системы (объекта), которое называют еще *фазовым пространством*. Изменение состояния в фазовом пространстве означает движение рассматриваемой точки, которая называется *изображающей*. При этом движении изображающая точка описывает кривую, называемую *фазовой траекторией*. Исследование поведения системы при таком подходе сводится к изучению характера фазового пространства и влияния его областей на характер движения объекта (системы).

Фазовая плоскость — это простой случай двумерного пространства с координатами x (состояние) и $y = dx/dt$ (скорость изменения состояния).

Тогда исходная система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$dx/dt = y; \qquad dy/dt = f_1(x, y), \tag{2.1}$$

где $f_1(x, y)$ — некоторая нелинейная функция координат.

Решение этой системы уравнений дает движение изображающей точки (или фазовую траекторию на плоскости). Метод фазовой плоскости (а далее и фазового пространства) дает общую картину всех возможных движений. Поясним это подробнее. Исключим пока время из системы уравнений (2.1), разделив, например, второе уравнение на первое:

$$dy/dx = f_1(x, y)/y. \tag{2.2}$$

Геометрический смысл полученной производной на плоскости x—y заключается в том, что каждой ее точке с парой координат (x, y) соответствует свое направление (тангенс угла наклона или касательная к возможной траектории движения), т.е. каждая точка плоскости имеет свое направление фазовой скорости.

Фазовая плоскость, таким образом, представляет собой поле направлений возможного движения. Это поле без решения уравнения (2.2) строится методом изоклин. *Изоклиной* называют линию постоянного угла наклона, для каждой из них существует свой постоянный коэффициент k_i, определяемый из соотношения $dy/dx = \text{const} = k_i$. Уравнение изоклины $f_1(x, y)/y = k_i$ является алгебраическим и вытекает из уравнения (2.2).

Варьируя k_i в области $(-\infty; +\infty)$, можно получить поле направлений для всего двумерного пространства $(x$—$y)$.

Теперь в принципе можно построить фазовую траекторию для любой начальной точки даже «вручную». Однако еще более важно, что картина поля направлений показывает все возможные особенности движения объекта.

Рассмотрим в качестве примера (имеющего и самостоятельное значение) фазовую плоскость системы уравнений 2-го порядка, описывающей так называемое колебательное звено (математический маятник).

2.2. Фазовые траектории колебательного звена

Уравнение свободного движения колебательного звена имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.3}$$

и описывает зависимость ускорения (первое слагаемое) от действующих сил, например силы сжатия пружины и трения при ненулевой скорости.

Будем считать вначале, что координата x ограничена и коэффициент силы упругого сжатия ω_0^2 постоянен. Коэффициент трения (демпфирование) h также будем считать постоянным. Тогда имеем

$$\frac{dx}{dt} = y; \ \frac{dy}{dt} = -2hy - \omega_0^2 x.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - \omega_0^2 x}{y}.$$

Введем коэффициент изоклины k_n соотношением $y(k_n + 2h) = -\omega_0^2 x$.

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат:

$$y = -\frac{\omega_0^2 x}{k_n + 2h}. \qquad (2.4)$$

Изменение k_n дает семейство изоклин, представляющее картину поля направлений на всей фазовой плоскости. Рассмотрим ее для k_n, принадлежащего интервалу $(-\infty; +\infty)$, и положим вначале $h = 0$. При этом отсутствует обмен энергией с внешней средой, и такое колебательное звено принято называть *консервативным*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0; \;\; y = -\frac{\omega_0^2}{k_n} x. \qquad (2.5)$$

При построении изоклин, совпадающих с осью x ($y = 0$), учтем, что всюду на этой оси согласно уравнениям (2.5) производная равна $\pm\infty$.

При построении изоклин, совпадающих с осью y, учтено, что всюду на этой оси производная равна нулю. При таких условиях все возможные траектории — это эллипсы, они описывают периодические процессы в виде незатухающих колебаний. Два таких эллипса (для разных начальных условий) показаны на рис. 2.1. Стрелками показано направление развития фазовых траекторий.

Периодические процессы с постоянной амплитудой и частотой принято называть *автоколебаниями*. Подобным образом представляются процессы в генераторах таких колебаний.

При $x = 0$, $y = 0$ движение прекращается, так как $dx/dt = 0$. Подмножества, на которых прекращается движение, называют *особыми*. Особая точка, расположенная в начале координат и окруженная замкнутыми траекториями, носит название *центра*.

Рассмотрим *реальное колебательное звено*. Звено без демпфирования (консервативное) интересно теоретически. В реальных звеньях если $h > 0$, то энергия рассеивается за счет трения, либо если $h < 0$, то энергия подводится извне.

Рассмотрим случай, когда $h < 0$. В уравнении изоклины (2.4) на оси y ($x = 0$) коэффициент k_n действует на производную со знаком, совпадающим со знаком y, так как $k_n - 2h = 0$ при $x = 0$ и $k_n = 2h$. Соответственно изменяются другие направления изоклин (кроме оси x). Поле направлений такого вида является однородным, но соответствует фазовым траекториям, показанным стрелочками на рис. 2.2, и расходящимся колебаниям. Особая точка называется *неустойчивым фокусом*.

Рассмотрим случай, когда $h > 0$. В уравнении изоклины (2.4) на оси y ($x = 0$) коэффициент k_n приобретает знак, обратный знаку y ($k_n + 2h = 0$ при $x = 0$ и $k_n = -2h$). Соответственно уравнению (2.4)

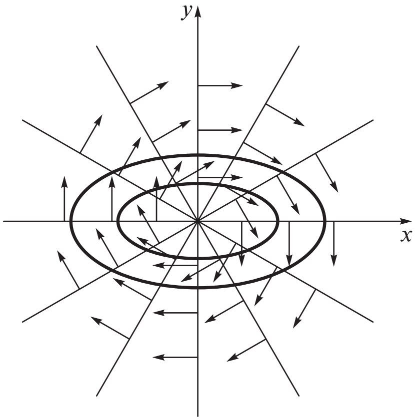

Рис. 2.1. Фазовая плоскость колебательного звена без демпфирования

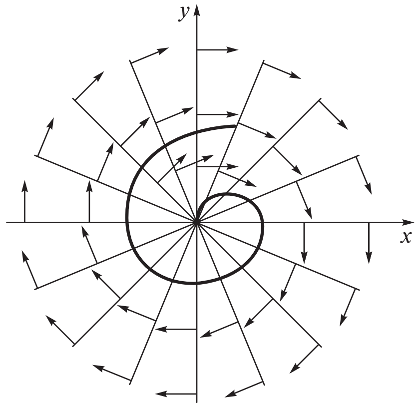

Рис. 2.2. Фазовая плоскость колебательного звена при $h < 0$

поворачиваются остальные направления изоклин (кроме оси x). Особая точка в этом случае называется *устойчивым фокусом*.

Для рассматриваемого примера представляют интерес еще два случая.

Допустим, что в колебательной системе физического маятника коэффициенты изменяются таким образом, что масса m уменьшается и в уравнении (2.3) увеличивается h. Колебания будут вначале затухающими, и, когда m станет очень малой, они вообще прекратятся. Когда относительное значение h станет больше 1, решение уравнения (2.4) примет вид $x = ce^{-s_1 t}$; $y = -s_1 ce^{-s_1 t}$.

При этом особая точка из устойчивого фокуса превратится в устойчивый узел, как это показано на рис. 2.3. Стрелками показано направление развития фазовых траекторий.

Если $h < -1$, то корни положительны и решение имеет вид $x = ce^{s_1 t}$; $y = s_1 ce^{s_1 t}$. В этом случае получается картина фазовых траекторий с особой точкой типа неустойчивый узел.

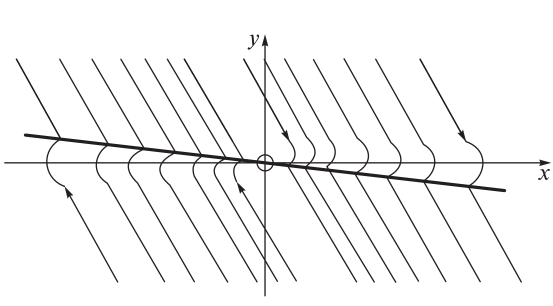

Рис. 2.3. Устойчивый узел

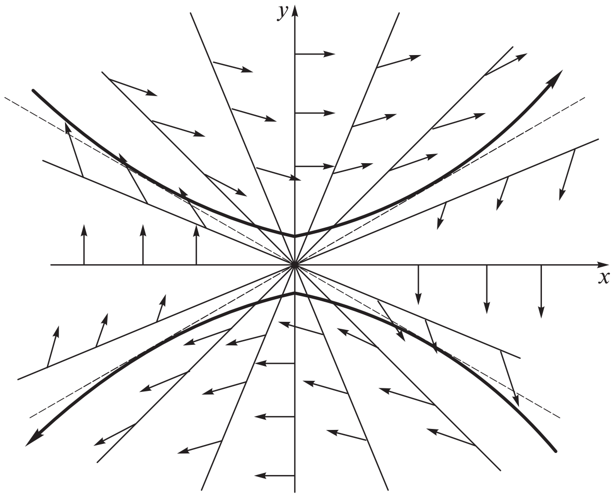

Рис. 2.4. Картина фазовых траекторий при различных начальных условиях

Рассмотрим для полноты анализа «теоретический» случай, когда, взяв для простоты $h = 0$, будем считать упругость в уравнении (2.4) величиной отрицательной, т. е.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - cx = 0.$$

Уравнение изоклин будет иметь вид $y = cx/k_n$.

Картина фазовых траекторий при различных начальных условиях имеет вид, показанный на рис. 2.4. Стрелками показано направление развития фазовых траекторий. Особая точка в этом случае называется седлом.

2.3. Динамическая система в трехмерном фазовом пространстве

Описание математического маятника в реальных физических задачах трансформируется и усложняется. Если, например, рассмотреть задачу о движении некоторого автономного аппарата в атмосфере при сравнительно быстром расходе топлива, то в общем уравнении

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + v\frac{dx_1}{dt} + cx_1 = 0,$$

где x_1 — путь; x_2 — скорость,

или

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad (2.6)$$

ускорение можно представить с учетом действующих сил:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}(u_1 - f^0_{\text{тр}} - a_1 x_2 - a_1 x_2^2),$$

где m — масса; u_1 — движущая сила; $f^0_{\text{тр}}$ — сила трения покоя; $a_1 x_2^2$ — сила аэродинамического сопротивления.

Вводя вместо массы m динамическую переменную x_3, получим еще одно уравнение (для расхода топлива) вида

$$\frac{dx_3}{dt} = -a_3 x_2 - a_4 x_2^2.$$

Если исключить из этих уравнений время, разделив, например, на уравнение (2.6) два других уравнения, то получим уравнения изоклин для двух пар фазовых плоскостей, что дает возможность построить так называемую многолистную фазовую плоскость.

Однако для компьютерных систем с использованием средств 3D-графики можно две пары фазовых плоскостей объединить в едином трехкоординатном представлении. Таким же образом, объединяя исходные дифференциальные уравнения, вводя время как еще одну переменную (это было показано прежде), составляя попарно отношения дифференциалов координат $dx_i/dx_j = \Phi(x_i, x_j)$ для всех i, j и рассматривая получаемые из этих отношений уравнения изоклин $\Phi(x_i, x_j) = K_i$, можно построить картину поля направлений для любого сочетания пар или троек координат. В последнем случае 3D-изображение, даваемое на экране ЭВМ, является трехмерным сечением многомерного пространства.

Метод фазового пространства является при современном развитии графических средств вычислительной техники достаточно мощным средством исследования сложных систем управления. Кроме того, фазовые представления дают возможность более точного контроля траектории движения. Это, в свою очередь, предоставляет возможность построения алгоритмов управления системами в реальном времени.

На рис. 2.5 показаны фазовые траектории в трехмерном пространстве. Стрелками показано направление развития фазовых траекторий. Они отличаются только тем, что направления вдоль «вертикальной» траектории разные и в одном случае траектория направлена к особой точке, а во втором — от нее. Из дальнейшего будет видно, что это противоположные случаи. Там же можно видеть и проекции на более простую поверхность, по которым потеряно представление о движении вверх-вниз. Это чрезвычайно

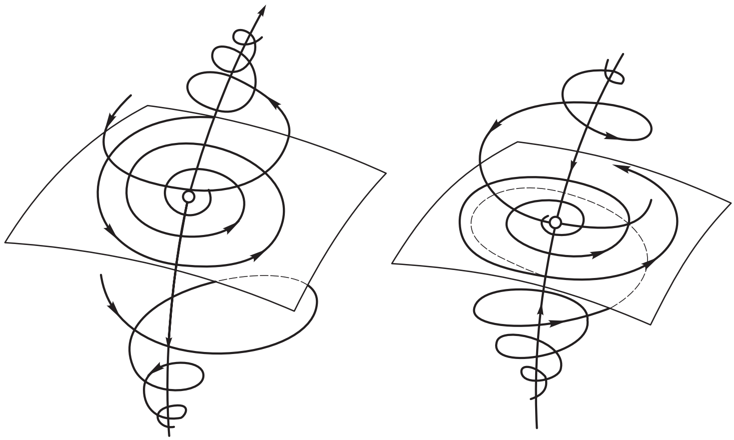

Рис. 2.5. Примеры фазовых траекторий в пространстве:

а — сходящиеся вдоль вертикального направления; *б* — расходящиеся вдоль вертикального направления

важное различие в характере движения остается неучтенным при сокращении размерности фазового пространства и приводит к серьезным ошибкам.

Как следует из рассмотрения фазовых портретов динамических систем, окрестность особой точки (т. е. равновесного состояния) может быть областью ее притяжения либо областью отталкивания от нее. Естественно, говорить о состоянии равновесия в случае отталкивания не имеет смысла.

Поэтому первый вопрос, который решается в задаче анализа и определяет качество поведения динамической системы, формулируется так: «Устойчиво ли данное состояние (данная особая точка или их множество)?» Кроме того, для неустойчивых состояний не может использоваться ряд методов теории (например, преобразование Лапласа) и не имеет смысла говорить о качестве.

2.4. Определение устойчивости по Ляпунову

Пусть имеется динамическая система

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, t),$$

расположенная в некоторой окрестности особой точки $\boldsymbol{X} = 0$, т. е. с начальными координатами (начальными условиями) $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0$. Исследуем поведение этой динамической системы при отсутствии внешних воздействий, т.е. $\boldsymbol{F}(t)=0$. В момент времени $t>t_0$ (после отклонения $\boldsymbol{X}(t_0)>0$) возникает движение $\boldsymbol{X}(t)$.

Если по ограниченным начальным отклонениям

$$\|\boldsymbol{X}(t_0)\| \le \lambda \tag{2.7}$$

можно указать область дальнейшей ограниченности движения $\delta(\lambda)$

$$\|\boldsymbol{X}(t)\| \le \delta(\lambda), \tag{2.8}$$

то такая динамическая система называется устойчивой «по Ляпунову».

На рис. 2.6 показаны три особые точки, требующие исследования устойчивости. Стрелками показано направление развития фазовых траекторий. Фазовые траектории в их окрестностях таковы, что только с учетом начальных отклонений (разной величины) можно оценивать дальнейшее движение системы, а следовательно, и ее устойчивость.

Приведенный фазовый портрет (как и рис. 2.5) свидетельствует о неоднозначности понятия устойчивости в нелинейных системах, поэтому из общего определения устойчивости вытекают следующие частные случаи.

1. Устойчивость динамической системы «в малом» означает выполнение общих соотношений при величине $\lambda<\varepsilon\to 0$. Это свойство характеризует устойчивость систем, линеаризованных в малой окрестности особой точки.

2. Устойчивость называется асимптотической, если конечное отклонение $\boldsymbol{X}(t)=0$ при $t\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{X}(t)\|=0$.

3. Устойчивостью «в большом» называют случай, когда выполнены условия (2.8) при невыполнении условия (2.7).

4. Устойчивость «в целом» — выполнены условия (2.7) при $\lambda\to\infty$.

5. Абсолютной устойчивостью называется асимптотическая устойчивость в целом, т.е. при произвольно больших начальных отклонениях.

6. Если определение устойчивости справедливо в пределах $t\in T<$ $<\infty$, то говорят об устойчивости на конечном интервале времени.

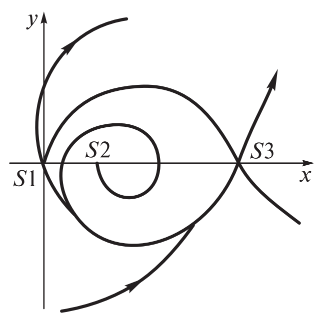

Рис. 2.6. Три особые точки $S1$—$S3$, требующие исследования устойчивости

2.5. Общая топология фазового пространства

В фазовом пространстве движение изображающей точки прекращается, когда правая часть векторно-матричного уравнения Коши, т.е. производная, равна нулю. Эти точки (или множества точек), в которых прекращается движение системы, называются *особыми*. Для линейных дифференциальных уравнений (в примере колебательного звена) фазовая плоскость однородна и является окрестностью одной особой точки. Из этого следует сходство решений дифференциальных уравнений при различных начальных условиях.

Для нелинейных систем фазовое пространство неоднородно, что характеризуется следующими явлениями.

1. Фазовое пространство образовано из областей с различными движениями, зависящими от вида нелинейности уравнений, причем каждая такая область характеризуется своей особой точкой (или их множеством). Границы этих областей носят общее название *линий переключения*.

2. Возможен случай, когда сама линия переключения является фазовой траекторией. Такая линия переключения называется *сепаратрисой* и обладает некоторыми особыми свойствами.

3. В нелинейных системах возможно существование множества особых точек разного вида, в частности отрезков. Каждая особая точка может иметь вокруг себя область с локально однородным характером движения, например область притяжения особой точки, область отталкивания от особой точки, замкнутая траектория вокруг особой точки. Каждый тип особых точек имеет свое название, определяемое фазовой траекторией в их окрестности.

4. Существуют или могут существовать замкнутые траектории или даже поверхности движения, для которых имеется особое название (предельные циклы). Примером являются эллипсы на рис. 2.1.

5. Направление фазовых траекторий в окрестности предельного цикла может иметь четыре различные формы (одна из них показана на рис. 2.1):

• предельные циклы образуют концентрические, вложенные друг в друга поверхности, как правило — это устойчивые предельные циклы;

• предельный цикл окружен (со всех сторон) фазовыми траекториями, направленными к нему, — это устойчивый предельный цикл;

• предельный цикл окружен со всех сторон фазовыми траекториями, направленными вовне от предельного цикла, — это неустойчивый предельный цикл;

• предельный цикл имеет в окрестностях с одной стороны фазовые траектории, направленные к предельному циклу, с другой стороны фазовые траектории, направленные вовне от предельного цикла, — это полуустойчивый предельный цикл.

Наличие устойчивого предельного цикла говорит о том, что в динамической системе возможно установление автоколебаний, амплитуда и период которых в определенных пределах определяются лишь значениями параметров системы. Автоколебания могут возникать за счет непериодических источников энергии и обусловлены внутренними связями и взаимодействиями в самой системе. Одним из признаков автоколебательной системы может служить присутствие так называемой обратной связи, которая управляет расходом энергии непериодического источника. Из всего сказанного непосредственно следует, что математическая модель автоколебательной системы должна быть грубой и существенно нелинейной. Еще один пример системы, имеющей устойчивый предельный цикл, — модель с уравнениями движения вида

$$dx/dt = -y + x[1-(x^2+y^2)]; \quad dy/dt = x + y[1-(x^2+y^2)]. \quad (2.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что закон движения $x = \cos(t - t_0)$, $y = \sin(t - t_0)$ представляет собой периодическое решение системы дифференциальных уравнений (2.9), которое можно рассматривать как параметрическое описание замкнутой траектории:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.10)$$

Фазовая траектория (2.10) изолированная, потому что уравнения всех других траекторий на фазовой плоскости x—y имеют вид

$$x = \frac{\cos(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}; \qquad y = \frac{\sin(t - t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2(t-t_0)}}}.$$

Двигаясь по этим траекториям при значении $C > 0$, изображающая точка приближается к замкнутой траектории (2.10) изнутри, а при значениях $C < 0$ — снаружи, поэтому замкнутая траектория (2.10) представляет собой устойчивый предельный цикл. Обычно неустойчивые предельные циклы играют роль границы между областями с различным поведением фазовых траекторий.

2.6. Бифуркации динамических систем

Рассмотрим понятие бифуркации для систем 2-го порядка. Пусть правые части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений зависят от некоторого параметра λ, т. е. имеют вид

$$dx/dt = P(x, y, \lambda); \qquad dy/dt = Q(x, y, \lambda), \quad (2.11)$$

где $P(x, y, \lambda)$, $Q(x, y, \lambda)$ — аналитические функции своих аргументов.

Если при некотором значении λ система является грубой, то при небольшом изменении λ качественная картина на фазовой плоскости не изменится. Однако это не всегда так. Значение параметра $\lambda = \lambda^*$ называется бифуркационным, если при сколь угодно близких к λ^* значениях $\lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^*$ топологическая структура фазовой плоскости различна. Из определения бифуркационного значения параметра следует, что при $\lambda = \lambda^*$ система является негрубой. Поскольку картина траекторий на фазовой плоскости определяется особыми множествами, только те значения параметра λ оказываются бифуркационными, при которых появляются особые множества, имеющие негрубую природу. Когда при бифуркационном значении параметра λ^* появляется только один элемент особого множества, говорят, что автономная система (2.11) обладает первой степенью негрубости. В такой системе негрубые элементы могут быть одного из следующих типов:

- типа узла или седла, характеризуемым сложным состоянием равновесия, получающимся при слиянии двух простых особых точек;
- вырожденный фокус или центр;
- двойной предельный цикл, который может получиться при слиянии устойчивого и неустойчивого предельных циклов;
- сепаратриса, идущая из одного седла в другое или в него же.

Заметим, что в автономной системе 2-го порядка, состояние которой изображается точками на фазовом круговом цилиндре, может встретиться новый тип бифуркации, который невозможен в случае фазовой плоскости, а именно бифуркация, связанная с рождением или исчезновением предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. В отличие от фазовой плоскости, где устойчивый предельный цикл отображает автоколебательное движение в системе, устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр, соответствует периодическому ротационному (вращательному) движению.

Для системы (2.11), содержащей лишь один параметр λ, пространство параметров представляет собою прямую, а бифуркационные значения $\lambda = \lambda^*$ — точки, разбивающие эту прямую на области, в каждой из которых изменение параметра k_i не приводит к изменению фазового портрета. Если система содержит два параметра λ и μ, то тогда пространством параметров будет плоскость, разделенная на области одинакового поведения системы при помощи бифуркационных кривых. Зная структуру разбиения фазового пространства для какой-нибудь точки плоскости параметров $\lambda — \mu$, можно, непрерывно перемещаясь в этой плоскости, найти структуру фазового пространства для любой другой точки. При этом нужно знать лишь характер бифуркации, которая происходит в фазовом пространстве при переходе той или другой бифуркационной границы. В этом заключается эвристическая ценность теории бифуркаций.