ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

О. Д. ГОЛЬДБЕРГ, С. П. ХЕЛЕМСКАЯ

НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Учебник

Под редакцией О. Д. Гольдберга

Допущено
Учебно-методическим объединением
Московского государственного открытого университета
в качестве учебника для студентов высших учебных
заведений для дистанционных образовательных
технологий открытого образования по направлению
«Электротехника, электромеханика и электротехнологии»,
по специальности «Электромеханика»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 621.313(075.8)
ББК 36.261я73
Г63

Рецензенты:
проф. Московского авиационного института (МАИ),
д-р техн. наук *Б.Л.Алиевский*;
зав. кафедрой «Электрооборудование и автоматика» РГАЗУ,
д-р техн. наук, проф., академик АЭН РФ *В.И.Литвин*

Гольдберг О.Д.

Г63 Надежность электрических машин: учебник для студ. высш. учеб. заведений / О.Д.Гольдберг, С.П.Хелемская; под ред. О.Д.Гольдберга. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 288 с.

ISBN 978-5-7695-5739-2

Рассмотрены основные вопросы, связанные с повышением и оценкой надежности электрических машин. Показатели надежности являются вероятностными величинами, в связи с этим включены необходимые разделы по теории вероятностей и математической статистике, а также основы теории надежности. Показатели надежности электрических машин задаются в стандартах или в технических условиях. Они должны быть обеспечены на стадиях проектирования, изготовления и эксплуатации. Представлены методы расчетной и экспериментальной оценки надежности.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть полезен инженерам-электромеханикам, занимающимся проектированием, изготовлением и эксплуатацией электрических машин с учетом требований к их надежности.

УДК 621.313(075.8)
ББК 36.261я73

ISBN 978-5-7695-5739-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Надежность — один из важнейших показателей качества. Поэтому стандарты и технические условия на электрические машины, как правило, устанавливают требования к показателям надежности. Надежность электрических машин должна быть обеспечена на всех стадиях: при проектировании, изготовлении и эксплуатации. Это и определяет программу курса «Надежность электрических машин», которая положена в основу настоящего учебника.

Показатели надежности — вероятностные величины, поэтому освоение курса начинается с главы «Элементы теории вероятности и математической статистики», поскольку при изучении теории вероятностей в курсе «Высшая математика» такие разделы математической статистики, как теория выборок, критерии согласия, методы статистического планирования эксперимента рассматриваются недостаточно полно.

Глава 2 учебника знакомит с основами теории надежности. В ней приведены установленные стандартом термины и определения в области надежности, а также даны количественные характеристики надежности. К основам теории надежности отнесены и методы статистического планирования эксперимента, необходимые для решения важных задач в области надежности.

Надежность электрической машины зависит от условий окружающей среды и режимов работы машины, что должно учитываться при проектировании электрических машин и их эксплуатации. Поэтому в главе 3 приведена классификация климатических районов и условий (температура окружающей среды, высота над уровнем моря), в которых могут работать электрические машины, факторов окружающей среды промышленного происхождения, влияющих на надежность, режимов работы электрических машин.

Статистические данные о надежности разных типов электрических машин позволяют выявить наименее надежные узлы машин, характер и причины их отказов. В главе 4 проанализированы эти данные применительно к основным типам электрических машин.

В главе 5 приведены методики расчета надежности узлов электрических машин при их проектировании, основанные на математических моделях и рассмотрены методы обеспечения расчетной надежности электрических машин в процессе производства.

При испытаниях электрических машин на надежность главная проблема заключается в том, что ресурсные испытания требуют значительного времени. Для его сокращения разработаны методики ускоренных испытаний на надежность и экспресс-методики. Этим вопросам посвящена гл. 6.

Чтобы уровень надежности электрических машин, заложенный при проектировании и изготовлении, был сохранен в процессе эксплуатации, необходимо соблюдение ряда правил. С одной стороны — это правильный выбор и эксплуатация электрических машин с учетом условий, изложенных в гл. 3, с другой стороны — их эффективная защита от аварийных режимов. Эти вопросы, а также диагностика надежности электрических машин в процессе эксплуатации рассмотрены в гл. 7.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих странах вопросам оценки и повышения надежности технических изделий уделяют повышенное внимание.

В СССР систематически занимались надежностью военной техники. На всех предприятиях, изготовляющих изделия (или их комплектующие) для использования в военных целях, существовала военная приемка. Однако надежностью изделий общепромышленного назначения занимались от случая к случаю. Это в полной мере относилось и к электрическим машинам.

Толчком к изучению и повышению надежности электрических машин послужила статья профессора Н.А.Тищенко*, в которой на основе анализа статистических данных об отказах электрических машин на крупнейшем предприятии России — Магнитогорском металлургическом комбинате — были сделаны следующие выводы: во-первых, надежность электрических машин на этом предприятии низкая; во-вторых, низкая надежность машин приводит к значительным экономическим потерям. Потери, возникающие как из-за стоимости самого ремонта, так и из-за связанного с ремонтом ущерба от простоев оборудования, сопоставимы со стоимостью изготовления нового двигателя. Однако автор статьи, подняв важнейший вопрос о необходимости повышения надежности электродвигателей, в теоретической части статьи допустил принципиальную ошибку, которая привела к неправильным выводам.

Суть ошибки состоит в том, что для всего периода эксплуатации электрических машин принят один закон распределения вероятности безотказной работы от времени — экспоненциальное распределение. На основании этого сделан вывод, что для повышения надежности электрических машин необходимо при их проектировании существенно уменьшать электромагнитные нагрузки, но это приводит к увеличению расхода меди и электротехнической стали.

Как следует из материалов, изложенных в настоящем учебнике, график зависимости безотказной работы электрических машин от времени эксплуатации состоит из трех участков: первый соответствует периоду приработки (подчиняется закону распределения Вейбулла); второй — периоду нормальной эксплуатации, на котором происходят случайные отказы, распределенные по экс-

* Тищенко Н.А. Проблемы надежности электродвигателей // Электричество, 1961. № 11, 12.

поненциальному закону; третий — повышению отказов, вызванных старением или усталостью материалов (вероятность безотказной работы распределена по нормальному закону — закону Гаусса). Кроме того, Н.А.Тищенко совершенно не учел, что на надежность электрических машин влияют не только принципы их проектирования, но и обеспечение проектной надежности в процессе их изготовления и эксплуатации.

Если бы были приняты выводы автора статьи, потребовалось бы изменить основной принцип проектирования электрических машин: повышение электромагнитных нагрузок для снижения расхода меди и электротехнической стали. Министерство электротехнической промышленности СССР не могло пойти на это без тщательной проверки. С этой целью головным институтам электромашиностроения — Всесоюзному научно-исследовательскому институту электромеханики (ВНИИЭМ, г. Москва) и Всесоюзному научно-исследовательскому и проектно-технологическому институту электромашиностроения (ВНИПТИЭМ, г. Владимир) — было поручено возглавить работу по определению характера и причин отказов электрических машин, разработать методы оценки их надежности (путем расчетов и испытаний) и выработать рекомендации по повышению надежности.

Для координации работ, порученных почти всем электромашиностроительным заводам и институтам страны, был создан научно-технический совет (секция) «Качество и надежность электрических машин», председателем которого был назначен профессор О.Д.Гольдберг.

Работы проводились в следующих городах Российской Федерации: Москве, Владимире, Томске, Ярославле, а также в союзных республиках: Армянской, Украинской, Молдавской, Белорусской, Латвийской, Киргизской.

В работе научно-технического совета (секции) наиболее активное участие принимали следующие ученые: О.Д.Гольдберг, А.И.Голубович, А.Г.Горбунов, Я.А.Рипс, Б.М.Рыженская, Н.П.Трифонова, С.П.Хелемская (г. Москва), И.М.Комлев, Н.И.Суворов (г. Владимир), О.П.Муравлев, Ю.П.Похолков, Э.К.-Стрельбицкий (г. Томск), В.Э.Любалин, (г. Ярославль), Г.Л.Артемян, А.А.Назарян (Армения), Р.З.Перельман (Украина), В.Т.Хрущ (Молдавия), В.И.Русан (Белоруссия), А.О.Грундулис (Латвия), Ю.Н.Лапенко (Киргизия).

Совместными усилиями этих ученых и возглавляемых ими коллективов были получены следующие результаты:

- установлены причины и характер отказов электрических машин, определены законы распределения отказов;
- разработаны методы расчетной оценки надежности электрических машин и их узлов;
- разработаны методы входного контроля деталей и узлов;

- усовершенствован технологический процесс изготовления машин;
- разработаны методы испытаний (в том числе и ускоренные) на надежность;
- составлены правила эксплуатации, обеспечивающие проектную надежность, в том числе и способы защиты машин от аварийных режимов.

Основные результаты этих исследований нашли отражение в предлагаемом учебнике.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.1. Понятие случайного события и вероятности

Различают три вида событий: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдет при осуществлении определенных условий. *Невозможным* называется событие, которое наверняка не произойдет при осуществлении определенных условий. *Случайным* называется событие, которое может произойти или не произойти при осуществлении заданных условий.

Каждое случайное событие предсказать невозможно, однако большое число однородных случайных событий подчиняется определенным вероятностным законам. Теория вероятностей и занимается изучением этих закономерностей.

Действие, в результате которого наступает или не наступает случайное событие, называют *испытанием*. Если появление одного случайного события исключает появление других в данном испытании, то такие события называют *несовместными*. Если ни одно из событий не является более возможным, то такие события называют *равновозможными*. Единственно возможным называют такое событие, появление которого является *достоверным событием*.

Случайные события обозначают A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n. Равенство $A_1 = A_2$ означает, что появление одного из этих событий влечет за собой появление другого. Произведение событий A_1 и A_2 есть событие $A_3 = A_1 \cdot A_2$, состоящее в наступлении обоих событий A_1 и A_2. Сумма событий A_1 и A_2 есть событие $A_3 = A_1 + A_2$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_1 или A_2. Разность событий A_1 и A_2 есть событие $A_3 = A_1 - A_2$, состоящее в том, что событие A_1 происходит, а A_2 не происходит. Противоположное событие обозначается той же буквой, но с чертой сверху, например A и $\bar{A}$ — противоположные события. События A_1 и A_2 *несовместны*, если $A_1 \cdot A_2 = A_3$, где A_3 — невозможное событие. События A_k ($k = 1, 2, ..., n$) образуют полную группу событий, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них; при этом $\sum_{k=1}^{n} A_k = A$, где A — достоверное событие.

Задача 1.1. Рассмотрим два события: A_1 — хотя бы один из трех проверяемых электродвигателей бракованный, A_2 — все электродвигатели доброкачественные. Что означают события: а) $A_1 + A_2$; б) $A_1 \cdot A_2$?

Решение: а) событие $A_3 = A_1 + A_2$ состоит в наступлении хотя бы одного из событий A_1 или A_2: либо один из электродвигателей бракованный, либо все три — доброкачественные, т.е. событие A_3 — достоверное, а события A_1 и A_2 образуют полную группу;

б) событие $A_3 = A_1 \cdot A_2$, состоит в наступлении обоих событий A_1 и A_2, но так как события A_1 и A_2 несовместны (т.е. если предположить, что имеет место событие A_1, то событие A_2 произойти не может, и наоборот), то A_3 — невозможное событие.

Случайное событие можно охарактеризовать числом, называемым *вероятностью события* и равным отношению числа благоприятных исходов испытаний к общему числу исходов испытаний. Непосредственный подсчет вероятностей можно произвести в том случае, когда результат опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместимы и равновозможны.

Вероятность события A определяют по формуле

$$p\{A\} = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m — число благоприятных исходов; n — общее число исходов.

При нахождении значений n и m часто целесообразно пользоваться теорией сочетаний. Пусть, например, имеется $N = (N_1 + N_2)$ одинаковых изделий, из которых N_1 — исправные и N_2 — бракованные. Из них наудачу берут M изделий. Требуется вычислить вероятность того, что в числе извлеченных M изделий будет M_1 исправных и $M_2 = (M - M_1)$ бракованных. При этом число равновозможных случаев

$$n = C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!}, \tag{1.2}$$

благоприятствующих

$$m = C_{N_1}^{M_1} C_{N_2}^{M_2}, \tag{1.3}$$

так как одновременно с определенной комбинацией M_1 исправных изделий $\left(C_{N_1}^{M_1}\right)$, бракованные изделия M_2 могут быть извлечены $C_{N2}^{M_2}$ способами.

Задача 1.2. В партии из n двигателей бракованных k штук. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

Р е ш е н и е. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято l штук (это можно сделать C_k^l способами), а остальные $(m - l)$ изделий не бракованные, т.е. они взяты из общего числа $n - k$ (число способов равно C_{n-k}^{m-l}). Поэтому число благоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность $p = \dfrac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

Из определения вероятности следует, что вероятность достоверного события равна единице: $p\{A\} = 1$, а вероятность невозможного события равна нулю: $p\{A\} = 0$. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей: $0 \le p\{A\} \le 1$. Наиболее вероятное значение случайной величины называется ее *модой*.

Понятием, весьма близким к понятию вероятности, является *относительная частота события*, или *частость*, которая определяется по формуле

$$w(A) = \frac{w}{N}, \tag{1.4}$$

где w — число появлений события в N испытаниях.

Разница между вероятностью и частостью заключается в том, что для определения частости требуется проведение испытаний, а для определения вероятности они не требуются. Часто бывает удобно пользоваться статистическим определением вероятности. Тогда за вероятность события принимают его частость.

1.2. Основные теоремы и формулы теории вероятностей

В теории вероятностей основными являются теоремы умножения и сложения.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий гласит, что вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$p\ \{A_1 A_2 \dots A_n\} = p\{A_1\} \cdot p\{A_2\} \cdot \dots \cdot p\{A_n\}. \tag{1.5}$$

Задача 1.3. Цепь состоит из трех последовательно соединенных элементов. При увеличении напряжения сети более чем на 50 % может произойти ее разрыв вследствие выхода из строя одного из элементов соответственно с вероятностями 0,3; 0,4 и 0,6. Определить вероятность того, что при названных условиях разрыв цепи не произойдет.

Р е ш е н и е. Искомая вероятность равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Пусть событие A_k означает, что k-й элемент не выйдет из строя (k = 1, 2, 3). Тогда $p = p\{A_1A_2A_3\}$. Поскольку события независимы, то $p = p\{A_1\} \cdot p\{A_2\} \cdot p\{A_3\} = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}168$.

Обозначим вероятность прямого события p, а противоположного q. Если имеются события A_1, A_2, ..., A_n, независимые в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$p\{A\} = 1 - q_1q_2 \ldots q_n. \tag{1.6}$$

Если события A_1, A_2, ..., A_n имеют одинаковую вероятность, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$p\{A\} = 1 - q^n. \tag{1.7}$$

Задача 1.4. Определить вероятность выхода из строя (отказа) асинхронного двигателя при испытаниях, заключающихся в многократном (n раз) включении и отключении его от сети.

Р е ш е н и е. Пусть q — вероятность выхода из строя (отказа) двигателя при одном включении (отключении). Тогда вероятность противоположного события (безотказной работы двигателя) $p = 1 - q$. При проведении n испытаний вероятность отказа $Q = 1 - p^n = 1 - (1 - q)^n$.

Для анализа *зависимых* событий используют понятие *условной вероятности*. Запись $p_{A_1}\{A_2\}$ означает условную вероятность события A_2 в предположении, что наступило событие A_1.

Для нескольких зависимых событий вероятность совместного появления их равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных; при этом вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$p\{A_1A_2 \ldots A_n\} = p\{A_1\} \cdot p_{A_1}\{A_2\} \cdot p_{A_1A_2}\{A_3\} \cdot \ldots \cdot p_{A_1A_2A_{n-1}}\{A_n\}. \tag{1.8}$$

Задача 1.5. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой, если она содержит 5 % неисправных деталей?

Р е ш е н и е. Найдем вероятность q противоположного события A, которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Данное событие является произведением пяти событий $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, где A_k (k = 1, 2, 3, 4, 5) означает, что k-я проверенная деталь доброкачественная.

Вероятность события $A_1 - p\{A_1\} = 95/100$, так как всего деталей 100, а исправных 95. После осуществления события A_1 деталей остается 99, среди которых исправных 94, поэтому $p_{A_1}\{A_2\} = 94/99$.

Аналогично $p_{A_1A_2}\{A_3\} = 93/98$, $p_{A_1A_2A_3}\{A_4\} = 92/97$ и $p_{A_1A_2A_3A_4}\{A_5\} = 91/96$. По общей формуле находим $q = (95/100)(94/99)(93/98)(92/97)(91/96) =$ $= 0{,}77$.

Искомая вероятность $p = 1 - q = 0{,}23$.

Теорема сложения заключается в следующем. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = p\{A_1\} + p\{A_2\} + \ldots + p\{A_n\}. \qquad (1.9)$$

Задача 1.6. Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из 50.

Решение. Обозначим через A_1 — событие, состоящее в том, что из 50 взятых изделий нет ни одного бракованного, а через A_2 — событие, состоящее в том, что имеется только одно бракованное изделие. Искомая вероятность $p = p(A_1 + A_2)$. События A_1 и A_2 несовместны. Поэтому $p = p(A_1) + p(A_2)$.

Из 100 изделий 50 можно выбрать C_{100}^{50} способами. Из 95 небракованных изделий 50 можно выбрать C_{95}^{50} способами. Поэтому $p(A_1) = \dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$.

Аналогично $p(A_2) = \dfrac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$. Тогда $p = \dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \dfrac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} = 0{,}181$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p\{A\} + p\{\bar{A}\} = 1. \qquad (1.10)$$

Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

Вероятность появления одного из *независимых* событий не зависит от вероятности появления других.

Для двух совместных событий вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$p(A_1 + A_2) = p\{A_1\} + p\{A_2\} - p\{A_1 A_2\}. \qquad (1.11)$$

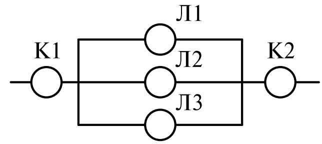
Задача 1.7. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 1.1.

Отказ за время t различных элементов цепи представляет собой независимые события, имеющие следующие вероятности:

Элемент	К1	К2	Л1	Л2	Л3
Вероятность	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Определить вероятность прекращения питания за указанный промежуток времени вследствие отказа: а) элементов К1 и К2; б) какого-либо элемента.

Рис. 1.1. Пример электрической цепи:
К — ключ; Л — лампа



Р е ш е н и е: а) обозначим через A_j (j = 1, 2) событие, состоящее в отказе элемента $К_i$(i = 1, 2). Искомая вероятность $p\{A\} = p\{A_1 + A_2\}$. Поскольку события A_1 и A_2 независимы, то $p\{A\} = p\{A_1\} + p\{A_2\} - p\{A_1\} \cdot p\{A_2\} =$ $= 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}8$;

б) пусть событие B означает разрыв цепи вследствие отказа всех трех элементов $Л_i$ (i = 1, 2, 3), тогда $p = p\{A + B\} = p\{A\} + p\{B\}$ — $p\{A\} \cdot p\{B\}$. Поскольку $p\{A\} = 0{,}8$, а $p\{B\} = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}252$, то $p = 0{,}8 + 0{,}252 -$ $- 0{,}8 \cdot 0{,}252 \approx 0{,}85$.

Формула полной вероятности записывается в следующем виде:

$$p\{A\} = p\{A_1\} \cdot p_{A1}\{A\} + p\{A_2\} \cdot p_{A2}\{A\} + \ldots + p\{A_n\} \cdot p_{An}\{A\}. \quad (1.12)$$

Важное значение в теории вероятностей имеет интегральная теорема Лапласа: если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появится в испытаниях от k_1 до k_2 раз приблизительно равна

$$p_n\{k_1 k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx. \quad (1.13)$$

Значения интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$$

приведены в работе [10]. Функцию $\Phi(x)$ называют функцией Лапласа. Пользуясь ею по формуле

$$p\left\{\left|\frac{w}{N} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi(x), \quad (1.14)$$

где

$$x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

можно определить вероятность того, что отклонение частости от постоянной вероятности по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$.

1.3. Случайные величины

Случайной называется величина, которая в результате испытаний может принимать то или иное значение. Случайные величины бывают *дискретные* и *непрерывные*. Для описания случайной величины следует знать, с какой вероятностью она принимает то или иное значение.

Законом распределений случайной величины называется зависимость между возможными значениями и соответствующими вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть представлен рядом распределения: многоугольником распределения или функцией распределения. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит все возможные значения случайной величины (x_i), а вторая — соответствующие вероятности (p_i):

x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_1	p_2	p_3	...	p_n

Сумма вероятностей всех возможных событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \qquad (1.15)$$

Ряд распределения можно изобразить графически: по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат — вероятности этих значений. Соединив полученные точки, получают многоугольник распределения (рис. 1.2).

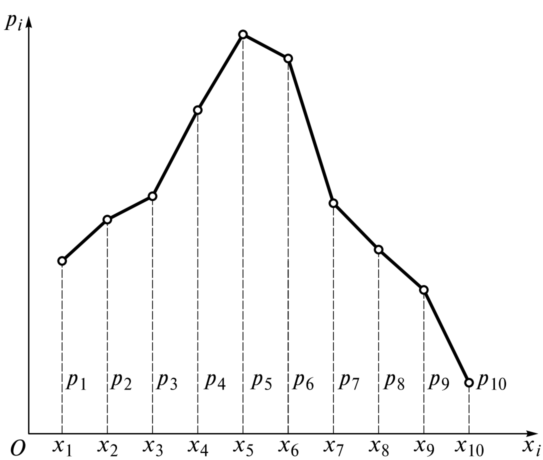


Рис. 1.2. Графическое представление ряда распределения (многоугольник распределения)

Задача 1.8. Из партии, состоящей из 100 электродвигателей, среди которых 10 бракованных, выбраны случайным образом пять электродвигателей для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных электродвигателей, содержащихся в выборке.

Решение. Поскольку в выборке, состоящей из пяти электродвигателей, число бракованных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то частные значения x_i случайной величины X:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4;\ x_6 = 5.$$

Вероятность $P(X = k)$ того, что в выборке окажется ровно k ($k = 0$, 1, 2, 3, 4, 5) бракованных электродвигателей

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^{k} C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получим:

$$p_1 = P(X = 0) = 0{,}583;\ p_2 = P(X = 1) = 0{,}340;\ p_3 = P(X = 2) = 0{,}070;$$

$$p_4 = P(X = 3) = 0{,}007;\ p_5 = P(X = 4) = 0;\ p_6 = P(X = 5) = 0.$$

По рассчитанным данным выписываем ряд распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Задача 1.9. Асинхронные двигатели испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого двигателя пройти испытания равны $^4/_5$ и независимы. Испытания заканчиваются после первого же двигателя, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

Решение. Испытания заканчиваются на k-м изделии ($k = 1, 2, 3, \ldots$), если первые $(k - 1)$ двигателей пройдут испытания, а k-й двигатель не выдержит испытаний. Если X — случайное число испытаний, то

$$P(X = k) = (1 - 1/5)^{k-1}(1/5) = (1/5)(4/5)^{k-1}\ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Полученная формула для ряда распределения дает следующие результаты:

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	$1/5$	$4/5^2$	$4^2/5^3$	...	$4^{k-1}/5^k$	...

Особенность этой задачи состоит в том, что теоретически число испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность такого события стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} P(X = k) = \lim_{k\to\infty}(4^{k-1}/5^k) = 0.$$

Для характеристики дискретной случайной величины удобно пользоваться числовыми характеристиками. Одной из основных числовых характеристик является *математическое ожидание*:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{1.16}$$

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому значению случайной величины $\bar{x}$ (тем точнее, чем больше число испытаний):

$$M(x) \approx \bar{x}. \tag{1.17}$$

Математическое ожидание обладает следующими основными свойствами:

• математическое ожидание постоянной величины равно постоянной:

$$M(C) = C; \tag{1.18}$$

• математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную равно произведению постоянной величины на математическое ожидание случайной:

$$M(Cx) = CM(x); \tag{1.19}$$

• математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(x + y + z) = M(x) + M(y) + M(z); \tag{1.20}$$

• математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(xyz) = M(x)M(y)M(z). \tag{1.21}$$

Условное математическое ожидание $M\ [X_{A_k}]$ дискретной случайной величины определяется формулой

$$M[X_{A_k}] = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_{i_{A_k}})x_i,$$

где $P(X = x_{i_{A_k}})$ — условная вероятность случайной величины X при принятом значении x_i, вычисленная в предположении, что в результате опыта произошло событие A_k.

Полное математическое ожидание описывается следующим выражением:

$$M[X] = M[M(X_{A_k})] = \sum_{k=1}^{m} P(A_k)M[X_{A_k}], \tag{1.22}$$

при этом предполагается, что события A_1, A_2, ..., A_m образуют полную группу несовместных событий, т.е. $\sum_{k=1}^{m} P(A_k) = 1.$

Задача 1.10. Прибор имеет n предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей и его заменяют новым. Определить среднее число перегрузок, после чего в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если отказ в момент перегрузки любого из n предохранителей равновозможен.

Решение. Обозначим $M(k)$ математическое ожидание числа перегрузок, после которых отказывает k первоначально установленных предохранителей из общего числа n.

Для вычисления $M(k)$ воспользуемся формулой полного математического ожидания (1.22). Если остались незамененными k предохранителей ($k \geq 1$), то для повреждения одного из них потребуется очередная перегрузка. В зависимости от результатов очередной перегрузки будут различными средние числа перегрузок, необходимых для сгорания предохранителей, оставшихся из числа первоначально установленных. При очередной перегрузке могут произойти два события:

1) A_1 — сгорел один из первоначально установленных предохранителей, вероятность чего $P(A_1) = \frac{k}{n}$;

2) A_2 — сгорел замененный предохранитель, вероятность чего $P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}$.

Если при очередной перегрузке произойдет событие A_1, то для замены всех k предохранителей, не замененных до очередной перегрузки, потребуется $1 + M(k-1)$ перегрузок. Если же при очередной перегрузке произойдет событие A_2, то для полной замены предохранителей потребуется $1 + M(k)$ перегрузок. Следовательно, на основании формулы полного математического ожидания имеем

$$M(k) = \frac{k}{n}\left[1 + M(k-1)\right] + \left(1 - \frac{k}{n}\right)\left[1 + M(k)\right] M(k) = 1 + \frac{k}{n} M(k-1) + \frac{n-k}{n} M(k)$$

или после несложных преобразований

$$M(k) - M(k-1) = \frac{n}{k}.$$

Если $k = 1$, т.е. остался лишь один незамененный предохранитель, то вероятность его замены равна $\frac{1}{n}$, а $M(1) = n$.

Тогда

$$M(n) - M(n-1) = \frac{n}{n};\ \ M(n-1) - M(n-2) = \frac{n}{n-1};\ \ldots;$$