

С. Н. ВОРОБЬЁВ

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебник

для студентов учреждений высшего

профессионального образования

по направлению подготовки 210700

«Инфокоммуникационные технологии и системы связи»



Москва

Издательский центр «Академия»

2013

УДК 621.391(075.8)
ББК 32.811.3я73
В751

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. Северо-западного государственного заочного технического университета *Г. И. Худяков*; д-р техн. наук, проф. Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им В. И. Ульянова (Ленина) *С. А. Яковлев*

Воробьёв С. Н.

В751 Цифровая обработка сигналов : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С. Н. Воробьёв — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 320 с. — (Сер. Бакалавриат).

ISBN 978-5-7695-9560-8

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (квалификация «бакалавр»).

Рассмотрены традиционные для этого направления темы теоретического и экспериментального исследования электрических и радиотехнических цепей, аналоговой и цифровой фильтрации, алгоритмов и устройств цифровой обработки сигналов. Большое внимание уделено вопросам теоретического обоснования методов оптимальной обработки и генерирования сигналов, моделирования систем и оценивания их помехоустойчивости.

Представлены новые результаты в области обнаружения и оценивания временных параметров импульсных сигналов, полученные при участии автора и опубликованные в учебных и научных изданиях Санкт-Петербургского университета аэрокосмического приборостроения. Основные теоретические выводы и рекомендации подкреплены примерами расчетов и моделирования в системе Matlab.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 621.391(075.8)
ББК 32.811.3я73

Оригинал-макет данного издания является собственностью Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом без согласия правообладателя запрещается

© Воробьёв С. Н., 2013

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2013

ISBN 978-5-7695-9560-8

© Оформление. Издательский центр «Академия», 2013

В настоящее время цифровая обработка сигналов — естественный метод практического решения разнообразных задач в радиоэлектронике и других областях науки и техники. Соответствующие учебные курсы включены Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования Российской Федерации в программы подготовки специалистов по всем радиотехническим и родственным им направлениям. Данный учебник предназначен для подготовки бакалавров по направлению 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

В последние годы в Санкт-Петербурге изданы современные учебники А. Б. Сергиенко [27] и коллектива авторов во главе с А. И. Солониной [28, 29]. Если к ним добавить Matlab-справочники В. Дьяконова [16], В. Г. Потемкина и П. И. Рудакова [25] и другие издания, в которых приведены подробные сведения о функциях цифровой обработки, то можно прийти к выводу о достаточной обеспеченности студентов специальной литературой. Тем не менее, для бакалавриата эта литература представляется избыточной: некоторые темы излагаются на излишне высоком уровне или слишком подробно. Следует отметить, что содержание дисциплины «Цифровая обработка сигналов» к настоящему времени окончательно не установилось. Например, некоторые авторы включают в пособие по цифровой обработке раздел о вейвлет-анализе. Направление цифровой обработки сигналов настолько широко, что может включать в себя и многие другие темы.

Автор данного учебника пытался следовать двум принципам:

- 1) методы цифровой обработки сигналов, хотя и имеют некоторую специфику, базируются на общих законах математики и физики, разработанных для непрерывных пространств времени и частоты;
- 2) цифровая обработка сигналов существует не сама для себя, а как средство моделирования устройств и блоков систем.

Первым принципом объясняется большой объем главы 1, в которой приведены основные сведения из теории линейных систем [1, 6, 11, 17], теории вероятностей [2], теории случайных процессов [7, 21, 30, 32] и математической статистики [8, 13, 18—21], являющиеся базовыми для дальнейшего изложения методов цифровой обработки.

Моделирование систем предполагает имитацию обработки входных сигналов, маскируемых шумом, поэтому в главе 2 учебника

описываются Matlab-программы генераторов массивов конечных и полубесконечных реализаций шума [3, 6, 9]. Алгоритмы генерирования реализуют строгие решения соответствующих уравнений и в этом смысле оптимальны.

Моделируемые системы классифицируются по функциональному признаку на базе основных задач математической статистики и статистической радиотехники [3, 8—10, 13, 17—21, 24, 32]: проверка статистических гипотез, оценивание параметров распределений, линейная фильтрация, регрессионный анализ (главы 3 и 4). Дискретные решения задач трактуются как следствия общих решений для пространства непрерывного времени. Вкратце обсуждаются проблемы оптимизации обнаруживаемого сигнала [5].

В главе 5 рассматривается известная задача пересечения случайного процесса с неслучайным уровнем [4, 9, 10, 23, 26, 31]. Показано, что законы распределения времени хотя бы одного пересечения и первого пересечения нормальным процессом сближаются при увеличении крутизны пересекаемого уровня. Распределение времени хотя бы одного пересечения находится весьма просто. При измерении времени прихода импульсного сигнала методом временной фиксации пересечения фронтом сигнала заданного уровня крутизна фронтов реальных сигналов достаточно велика для трактовки времени прихода, как времени хотя бы одного пересечения. Метод хотя бы одного пересечения, подтвержденный многочисленными примерами моделирования, является простым инженерным решением задачи измерения временных параметров импульсных сигналов. Для унификации и упрощения моделирования разработаны несколько файлов-функций, приведенных в Приложении.

Традиционные для цифровой обработки вопросы фильтрации [14, 27—29] обсуждаются в главах 6 и 7. Из множества методов проектирования цифровых КИХ- и БИХ-фильтров выбраны, как представляется автору, наиболее показательные. Представлены вопросы приближенной ортогональности импульсных характеристик полосовых фильтров со слабо пересекающимися частотными характеристиками. Эта тема может представить интерес с точки зрения обобщения частотного разделения каналов и разделения по форме сигналов.

Одно из приложений цифровой обработки сигналов — классификация наблюдений методами иерархической группировки (кластерный анализ) кратко рассмотрено в главе 8, как одно из направлений распознавания образов [12, 15, 22]. Выбор этой темы объясняется в том числе хорошим Matlab-обоснованием.

Расчеты и моделирование выполнены в системе Matlab 7. Примеры сопровождаются Matlab-программами расчетов или их фрагментами.

1.1. Непрерывные и дискретные линейные системы

1.1.1. Общее описание линейной системы

Система — устройство, преобразующее входной сигнал $x(t)$ в выходной $y(t)$. Система может состоять из одного или нескольких *звеньев*, некоторые из них могут объединяться в *блоки*. *Типовые звенья*, преобразующие электрические сигналы (*апериодическое, колебательное, дифференцирующее, интегрирующее, усилительное* и др.), широко применяются в радиоэлектронике и изучаются в автоматическом управлении, радиотехнике и других дисциплинах. Терминология может различаться, например, колебательное звено в радиотехнике называется *колебательным (резонансным) контуром*.

Общий способ описания системы — ее *математическая модель*, которая может выглядеть как зависимость сигнала на выходе от сигнала на входе системы

$$y(t) = \varphi(x(t)), \quad (1.1)$$

в которой правило φ -преобразования сигнала $x(t)$ в сигнал $y(t)$, полностью описывающее работу системы, называется ее *оператором*. Модель системы в зависимости от решаемой задачи может отличаться от (1.1), но в любом случае следует стремиться к тому, чтобы оператор системы описывал ее достаточно полно в смысле решаемой задачи.

Реальные электрические сигналы также описываются математическими моделями. Например, $s(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t)$ — модель *амплитудно-модулированного* сигнала с частотой *несущего* колебания f_0 [Гц] и *огibaющей* $A(t)$. В теории всегда оперируют моделями сигналов и систем, поэтому термин *модель* применяется только там, где это необходимо для понимания сути излагаемого.

Модели систем и сигналов могут разрабатываться в пространствах непрерывного или дискретного времени (соответственно модели *непрерывных* и *дискретных* систем и сигналов). Непрерывные модели описываются функциями непрерывного времени; дискретные модели (векторы или матрицы, образуемые *отсчетами* непрерывных функций) — их значениями в *узлах* дискретизации — в фиксированные моменты времени. Функции, дискретизированные во времени,

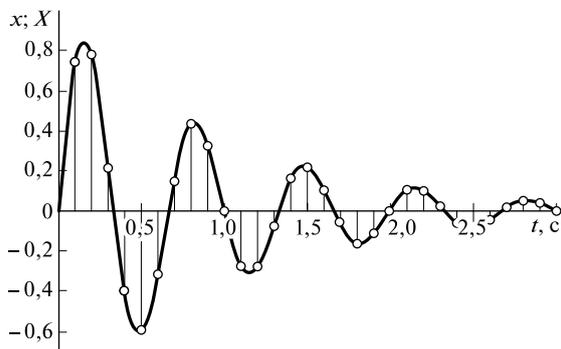


Рис. 1.1. Дискретизация сигнала во времени при $\Delta = 0,1$ с

называются *последовательностями* (отсчетов). Дискретизация сигнала во времени показана на рис. 1.1: с интервалом $\Delta = 0,1$ с на промежутке $0 \leq t \leq 3$ с берутся отсчеты непрерывного сигнала $x(t) = \exp(-|t|)\sin 3\pi t$ и образуют вектор $\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, \dots, x_{31}]$ — дискретный сигнал, соответствующий сигналу $x(t)$ (векторы — всегда вектор-столбцы).

Размерность дискретных сигналов (число отсчетов) конечна, а сами отсчеты — непрерывные величины, т. е. могут принимать не-счетное множество значений.

Общее описание дискретной системы аналогичное (1.1),

$$\mathbf{Y} = \Psi(\mathbf{X}),$$

где \mathbf{X} , \mathbf{Y} — $(n \times 1)$ -векторы входного и выходного сигналов, Ψ — оператор системы, задающий преобразование вектора \mathbf{X} в вектор \mathbf{Y} .

Все звенья *инерционны*. Это означает, что сигнал на выходе системы устанавливается с некоторой задержкой, форма выходного сигнала отличается от формы сигнала на входе. Пример переходных процессов приведен на рис. 1.2: на входе системы сигнал $x(t)$, по

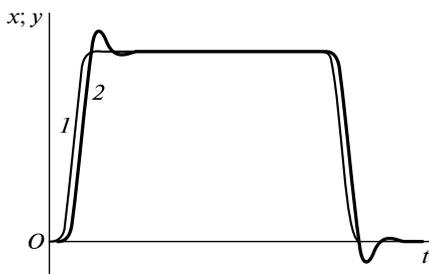


Рис. 1.2. Переходные процессы:

1 — сигнал на входе; 2 — сигнал на выходе

форме близкий к прямоугольному (кривая 1); на выходе (кривая 2) сигнал $y(t)$ задерживается, его *фронты* искажаются.

Процесс установления формы сигнала на выходе системы называется *переходным*. На рис. 1.2 показаны два переходных процесса, соответствующих установлению фронтов сигнала $y(t)$. Вне интервалов переходных процессов система находится в *установившемся режиме*.

Оператор системы, находящейся в установившемся режиме, называют ее *статической характеристикой* системы, находящейся в переходном режиме — *динамической*. По типу статической характеристики звенья и системы подразделяют на *линейные* и *нелинейные*. К линейным системам относятся те, оператор которых включает только линейные преобразования: умножение на неслучайный коэффициент, суммирование, дифференцирование, интегрирование, операции линейной алгебры. Примеры линейных операторов:

- преобразование Лапласа

$$F(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt;$$

- операции с матрицами

$$C = AB + E^T D^{-1} E.$$

Линейные системы — основа радиоэлектроники, поэтому важно знать их свойства.

1.1.2. Непрерывные линейные системы

Полная характеристика непрерывной линейной системы — *весовая функция* $h(t)$, позволяющая рассчитать выходной сигнал ее *сверткой (интегралом Дюамеля)* с сигналом $s(t)$ на входе:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Если учесть, что система включается в момент времени $t = 0$ (при $t < 0$ весовая функция $h(t) = 0$), нижний предел интегрирования следует положить равным нулю:

$$y(t) = \int_0^t s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)s(t-\tau)d\tau. \quad (1.2)$$

Свертка (1.2) является интегральным оператором непрерывной линейной системы.

Размерность весовой функции [1/с]; только в этом случае сигналы на входе и выходе будут измеряться в одних и тех же единицах, например в вольтах.

При исследовании непрерывных линейных систем в качестве входных сигналов обычно применяют следующие тест-сигналы:

1) *единичный перепад*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0; \end{cases}$$

2) сигнал прямоугольной формы с единичной амплитудой длительностью T

$$s(t) = u(t) - u(t - T).$$

Формирование прямоугольного сигнала из двух единичных перепадов соответствует фундаментальному свойству линейных систем — реакция линейной системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие;

3) *дельта-функцию Дирака*

$$\delta(t) = u'(t)$$

— производную единичного перепада, представляющую собой всплеск нулевой длительности и имеющую следующие свойства:

- площадь δ -функции равна единице:

$$\int \delta(t - \tau) dt = 1,$$

- *фильтрующее* свойство δ -функции:

$$\int \delta(\tau) x(t - \tau) d\tau = x(t); \quad (1.3)$$

4) монохроматический гармонический сигнал, имеющий форму синусоиды постоянной амплитуды и определенной частоты.

В Symbolic Math Toolbox (в пакет символьных вычислений) системы Matlab включены функция единичного перепада (*heaviside*) и δ -функция (*dirac*).

Все тест-сигналы представляют собой математические модели сигналов с бесконечной полосой частот, так как их фронты имеют нулевую длительность (в том числе и отрезок синусоиды постоянной амплитуды). Иными словами, такие сигналы могли бы быть сформированы безынерционными генераторами, имеющими бесконечную *полосу частот*. Однако системы с бесконечной полосой частот *физически невозможны* (не существуют в природе и не могут быть созданы). Тем не менее, реакция системы на физически невозможный тест-сигнал часто характеризует ее основные свойства.

Реакция системы на единичный перепад называется *переходной характеристикой* системы. По переходной характеристике можно

судить об инерционности системы: разность смещенных переходных характеристик представляет собой реакцию системы на воздействие в виде прямоугольного сигнала с длительностью, равной смещению.

Пример 1.1. Весовые функции аperiodического и колебательно-го звеньев имеют вид

$$h_{\alpha}(t) = \alpha \exp(-\alpha t); \quad (1.4)$$

$$h_{\nu}(t) = \mu \exp(-\alpha t) \sin \beta t, \quad (1.5)$$

где $\alpha, \beta, \mu = (\alpha^2 + \beta^2) / \beta$ — коэффициенты. Переходные характеристики рассчитываются сверткой (1.2):

$$y_{\alpha}(t) = \alpha \int_0^t u(\tau) \exp(-\alpha(t-\tau)) d\tau = \alpha \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)) d\tau = 1 - \exp(-\alpha t);$$

$$\begin{aligned} y_{\nu}(t) &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \int_0^t u(\tau) \exp(-\alpha(t-\tau)) \sin \beta(t-\tau) \tau d\tau = |-\beta(t-\tau) = x| = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} \int_0^{\beta t} \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} x\right) \sin x dx; \end{aligned}$$

это табличный интеграл: $\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1} (a \sin x - \cos x)$, подстановка в него значения $a = -\alpha/\beta$ дает переходную характеристику:

$$y_{\nu}(t) = 1 - \exp(-\alpha t) \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right).$$

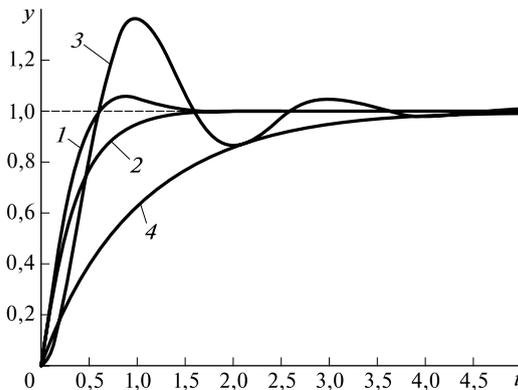


Рис. 1.3. Переходные характеристики:

1, 3 — колебательно-го звена; 2, 4 — аperiodического звена

Переходные характеристики показаны на рис. 1.3: кривые 1, 3 — $y_v(t)$, кривые 2, 4 — $y_a(t)$. Звенья с параметрами $\alpha = 3$, $\beta = \pi$ (кривые 1, 2) менее инерционны, чем с параметрами $\alpha = 1$, $\beta = \pi$, так как переходные процессы заканчиваются в них раньше и менее выражены. Переходные характеристики при $t \rightarrow \infty$ приближаются к единице.

Многие математические модели следует считать безразмерными. Так, переходная характеристика $y_a(t)$ безразмерна, а размерность $y_v(t)$ не определена, поскольку коэффициент α/β выражен в 1/рад. Примеры моделей с размерностями, не имеющими физического смысла, в дальнейшем будут использоваться неоднократно. В этой связи в большинстве примеров параметры функций безразмерны.

Прохождение сигнала прямоугольной формы длительностью $T = 3$ через линейные звенья показано на рис. 1.4. Чем медленнее развиваются переходные процессы, тем больше искажается форма сигнала на выходе.

На рис. 1.2—1.4 не указана размерность оси времени, так как в этих примерах она не принципиальна: время может измеряться в секундах или иметь иную размерность (миллисекунды, микросекунды). В дальнейшем размерность будет указываться при необходимости.

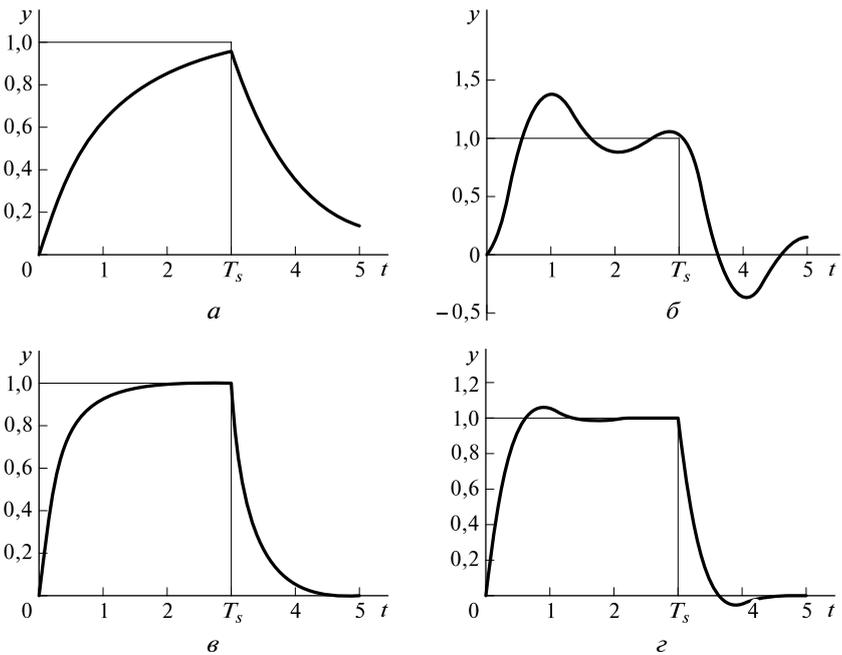


Рис. 1.4. Сигналы на выходах аperiodического (a , $в$) и колебательного ($б$, $з$) звеньев:

a , $в$ — $\alpha = 1$; $б$, $з$ — $\alpha = 3$

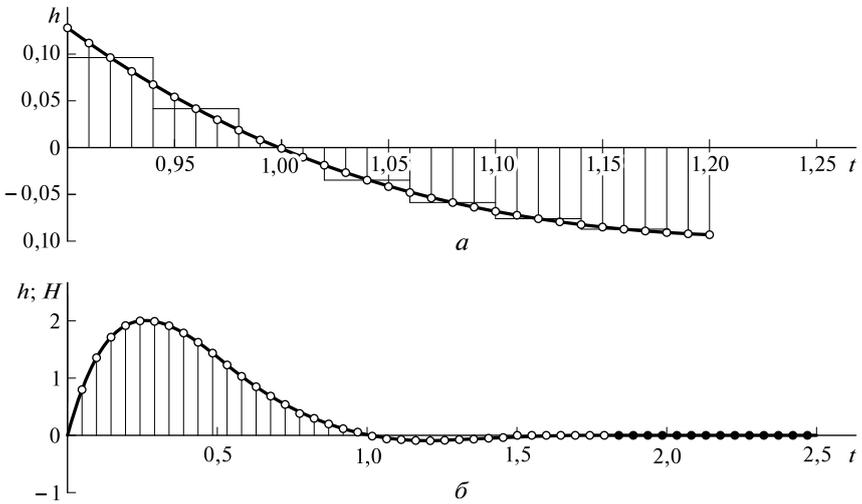


Рис. 1.5. К экспериментальному оцениванию весовой функции: *a* — имитация δ -функциями; *b* — оценки значений функции

Переходная характеристика показывает, что сигнал на выходе устанавливается не сразу — установившемуся значению предшествует *переходной процесс*.

Если на входе системы сигнал имеет вид δ -функции, то по фильтрующему свойству (1.3) свертка (1.2) дает на выходе

$$y(t) = \int_0^t \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t) \quad (1.6)$$

— весовую функцию системы. Этот результат лежит в основе экспериментального определения весовой функции: на линейную систему воздействуют коротким импульсом — реакция системы тем ближе к ее весовой функции, чем короче импульс. Такой эксперимент можно смоделировать, вычисляя интеграл (1.6) по формуле прямоугольников в виде последовательности чисел

$$Y_i = h(t_i) p(t - t_i), \quad t_i = (i - 1/2)dT, \quad i = 1, 2, \dots,$$

в которых $p(t - t_i)$ — прямоугольная функция с единичной амплитудой длительностью dT , смещенная в точку t_i , имитирует δ -функцию. На рис. 1.5, *a* эта процедура поясняется для фрагмента некоторой функции $h(t)$ при длительности функции $p(t)$, равной $dT = 4dt$ (dt — интервал дискретизации) — площади прямоугольников

$$Y_i \approx \int_{dT_i} h(t) dt.$$

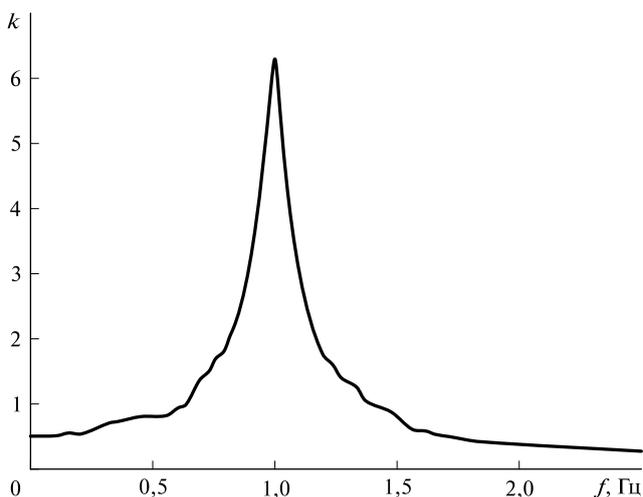


Рис. 1.6. Экспериментальная частотная характеристика колебательного звена с $f_0 = 1$ Гц

На рисунке 1.5, б показаны непрерывная кривая — весовая функция и штриховая диаграмма — экспериментальные оценки Y_i ее значений, вычисленные таким образом. Как следует из этого примера, приближение *гладких* весовых функций, имеющих непрерывную производную, короткими сигналами может быть достаточно точным.

Подавая на вход системы синусоидальные сигналы $s(t) = A \sin(2\pi ft)$ постоянной амплитуды A с различной частотой f , можно, фиксируя амплитуду $A_{\text{вых}}$ сигнала на выходе в установившемся режиме, получить зависимость $A_{\text{вых}} = \varphi(f)$, которую называют *частотной характеристикой* системы. В этом случае частотная характеристика представляет собой зависимость *коэффициента усиления*

$$k(f) = \frac{A_{\text{вых}}(f)}{A}$$

системы от частоты сигнала. Пример экспериментальной частотной характеристики колебательного звена с *собственной* частотой $f_0 = 1$ Гц представлена на рис. 1.6.

Пример 1.2. Весовая функция идеального *фильтра нижних частот* (ФНЧ) имеет вид

$$h(t) = 2 \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}.$$

Переходная характеристика такого ФНЧ (рис. 1.7) описывается функцией интегрального синуса

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2\pi(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2\pi t)$$

и в Symbolic Math Toolbox строится программой

```
syms t % вход в пакет Symbolic Math Toolbox
y=2/pi*sinint(t)
ezplot(y,0,25) % рис. 1.7
ylim([0 1.3]) % вертикальные пределы графика
```

Некоторые линейные системы могут описываться дифференциальными операторами — уравнениями вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_m x, \quad (1.7)$$

в которых $x(t)$, $y(t)$ — сигналы на входе и выходе, $m \leq n$. Наибольший (конечный) порядок производной n определяет *порядок системы*.

Дифференциальные модели не выше второго порядка адекватны многим реальным звеньям и широко применяются в автоматическом управлении. Достоинство дифференциальных моделей — простота перехода от описания систем в пространстве времени к описанию в пространстве частоты. Однако не всякая линейная система описывается дифференциальным уравнением, например, идеальный ФНЧ — система бесконечного порядка. Следовательно, интегральная модель (1.2) линейной системы более общая, чем дифференциальная (1.7).

Пример 1.3. Дифференциальная модель апериодического звена — уравнение первого порядка

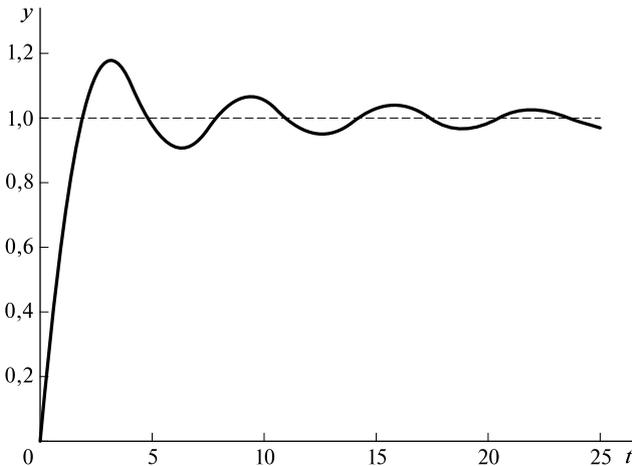


Рис. 1.7. Переходная характеристика идеального ФНЧ

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t),$$

где T — постоянная времени; k — коэффициент передачи. Модель соответствует весовой функции

$$h(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right).$$

В принятых обозначениях функция (1.4) записана для $k = 1$, $T = 1/\alpha$. Дифференциальная модель колебательного звена — уравнение второго порядка

$$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon T \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t)$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 y(t) = k\omega^2 x(t). \quad (1.8)$$

Здесь ε — коэффициент затухания; ω — частота колебаний, $\omega = 1/T$; k — коэффициент передачи звена. Весовая функция звена

$$h(t) = k \frac{\omega^2}{\omega_0} \exp(-\varepsilon\omega t) \sin(\omega_0 t),$$

где ω_0 — частота затухающих колебаний ($\omega_0 = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2}$), соответствует функции (1.5) с параметрами $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\omega_0$, $\beta = \omega_0$; $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$;

$k = \beta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Колебательные звенья радиотехнических устройств имеют значения коэффициента затухания порядка $\varepsilon \approx 10^{-2}$ что приводит к практическому равенству частот: $\omega_0 \approx \omega$.

1.1.3. Дискретные линейные системы

Дискретизация, подобная показанной на рис. 1.1 с интервалом Δ , преобразует входной сигнал, весовую функцию и выходной сигнал к векторному виду (*решетчатым* функциям): $s(t) \Rightarrow \mathbf{S}$, $h(t) \Rightarrow \mathbf{H}$, $y(t) \Rightarrow \mathbf{Y}$, а интеграл в соотношении (1.2) — к сумме. Если в свертке (1.2) обозначить t индексом k , τ — индексом i , ее дискретный аналог примет вид

$$y_k = \sum_{i=0}^k x_i h_{k-i}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.9)$$

Сумма (1.9) называется *дискретной сверткой*, ее векторная запись имеет вид

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{H}.$$

Дискретная свертка при $k = 0, 1, \dots$ формирует значения

$$y_0 = x_0 h_0,$$

$$y_1 = x_1 h_0 + x_0 h_1,$$

$$y_2 = x_2 h_0 + x_1 h_1 + x_0 h_2,$$

.....,

т.е. сигнал \mathbf{Y} формируется отсчет за отсчетом. Значение сигнала \mathbf{Y} получается как результат процесса пошагового «наполнения» сигнала \mathbf{X} и весовой функции \mathbf{H} друг на друга, перемножения соответствующих отсчетов x_i и h_j и суммирования произведений.

В пакет Signal Processing системы Matlab включены функции вычисления дискретной свертки $\text{conv}(h, x)$ и $\text{filter}(h, 1, x)$ векторов x и h . Функция conv формирует вектор y размерностью $n_y = n_h + n_x - 1$, включающий переходные процессы в начале и в конце. Функция filter вычисляет свертку размерностью $n_y = n_x$ только с начальным переходным процессом.

Пример 1.4. Прямоугольный сигнал с амплитудой $A_{\text{вх}} = 1$, длительностью $T = 1$ с на выходе апериодического звена с коэффициентом передачи $k = 1$ и постоянной времени $T = 0,1$ с; интервал дискретизации $\text{dtx} = 0,1$ с. В установившемся режиме дискретная свертка формирует сигнал $y_{\text{уст}} = A_{\text{вх}} \sum_{i=1}^{n_h} h_i = \sum_{i=1}^{n_h} h_i$, который при $k = 1$ должен

быть равен $A_{\text{вх}} = 1$. Поэтому сигналы на выходе нормируются — делятся на сумму sh отсчетов весовой функции. Matlab-программа расчета дискретной свертки (рис. 1.8):

```

% сигнал
Tx=1           % длительность сигнала
dtx=0.1       % интервал дискретизации
tx=0:dtx:Tx;
nx=length(tx) % число отсчетов nx = 101
x=ones(1, nx); % отсчеты прямоугольного
               % сигнала
% весовая функция
a=10          % параметр звена
dth=0.2       % интервал дискретизации
th=0:dth:T;
nh=length(th) % число отсчетов nh = 51

```

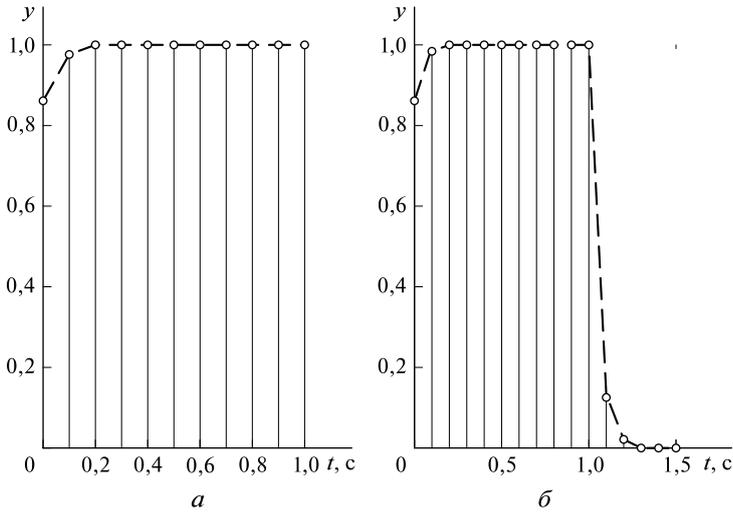


Рис. 1.8. Отсчеты прямоугольного сигнала на выходе аperiodического звена: *a* — расчет функцией filter; *б* — расчет функцией conv

```

h=a*exp(-a*th); % отсчеты весовой
% функции
sh=sum(h) % сумма отсчетов
% весовой
% функции
y=filter(h,1,x)/sh; % передний фронт
% сигнала
% на выходе
subplot(1,2,1),plot(tx,y,'-') % рис. 1.8, а
hold on
stem(tx,y)
y=conv(h,x)/sh; % сигнал на выходе
% звена
ty=0:dtx:(nx+nh-2)*dtx; % ось времени
% с nx + nh - 1 узлами
subplot(1,2,2),plot(ty,y,'-') % рис. 1.8, б
hold on
stem(ty,y)

```

Пример 1.5. Прохождение амплитудно-модулированного сигнала $s(t) = \sin(2\pi ft)$ длительностью $T_s = 5$ с через колебательное звено с ненормированной весовой функцией (1.5) при $\mu = 1$

$$h(t) = \exp(-t)\sin(2\pi t)$$

описывается дифференциальным уравнением (1.8)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + (1 + 4\pi^2)y(t) = 2\pi x(t).$$

Собственная частота звена $f_0 \approx 1$ Гц. Задание различных значений частоты f входного сигнала позволит получить частотную характеристику колебательного звена. Весовая функция нормирована так же, как в предыдущем примере — переходная функция приближается к единичному уровню. На рис. 1.9 показаны входные (кривые 1) и огибающие выходных сигналов различной частоты (жирные кривые 2): сигналы с частотой f , близкой к частоте $f_0 = 1$ Гц, усиливаются, сигналы с другими частотами подавляются. Этот эффект иллюстрируется частотной характеристикой, представленной на рис. 1.10. Matlab-программа расчетов:

```

                                % сигналы на выходе звена
a=1; f0=1                        % параметры весовой
                                % функции
Ts=5                              % длительность сигнала
del=0.01
t=0:del:Ts;
n=length(t)
h=exp(-a*t) .* sin(2*pi*f0*t); % отсчеты весовой
                                % функции

sh=sum(h)
h=h/sh                            % нормировка весовой
                                % функции

```

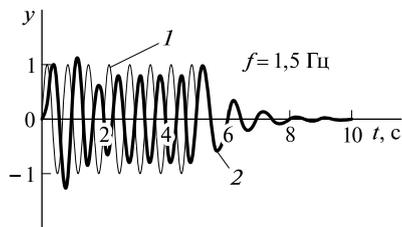
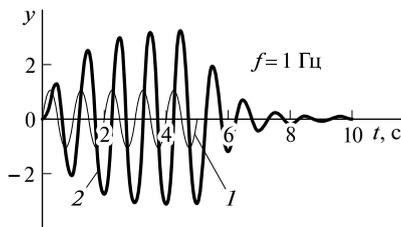
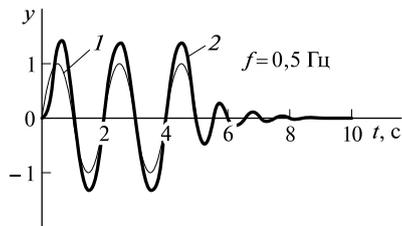
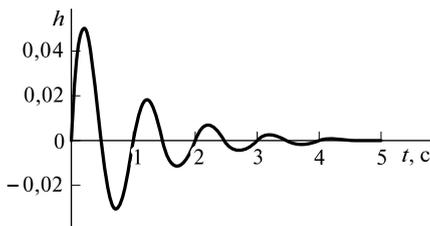


Рис. 1.9. Амплитудно-модулированные сигналы различной частоты на выходе колебательного звена

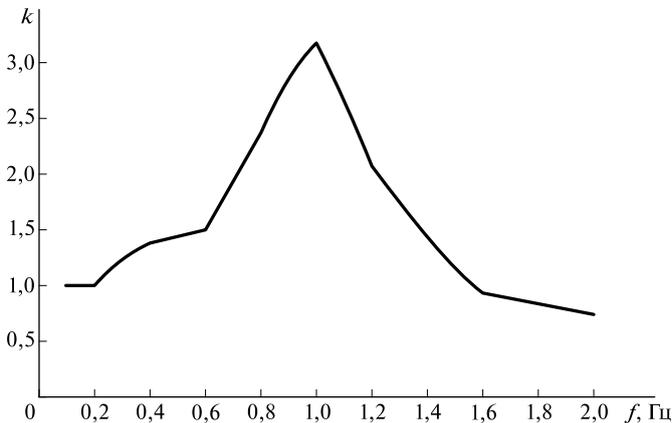


Рис. 1.10. Частотная характеристика колебательного звена при $f_0 = 1$ Гц

```

subplot(2,2,1),
plot(t,h,t,zeros(1,n))      % рис. 1.9
pause
for i=1:3
f=i/2;                      % частота сигнала, Гц
s=sin(2*pi*f*t)
y(i,:)=conv(h,s);          % сигнал на выходе звена
end
tt=0:del:2*Ts;
nn=length(tt)
subplot(2,2,2),plot(tt,y(1,:),
t, sin(pi*t),tt,zeros(1,nn)) % рис. 1.9
subplot(2,2,3),plot(tt,y(2,:),t, sin(2*pi*t),tt,
zeros(1,nn))
subplot(2,2,4),plot(tt,y(3,:),t, sin(3*pi*t),tt,
zeros(1,nn))
pause
                                % частотная характеристика
for i=1:20
f(i)=i/10;
s=sin(2*pi*f(i)*t)
sm(i)=max(conv(h,s)*del)
end
plot(f,sm)                    % рис. 1.10

```

Дискретную свертку (1.2) можно обобщить, т.е. описать линейную систему *оператором* — матрицей **A**:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}. \quad (1.10)$$

Если размерность оператора $m \times n$, каждые n отсчетов входного сигнала пересчитываются в m отсчетов выходного сигнала. В предельном случае $n = 1$ произведение (1.10) принимает вид (1.2). Удобно записывать входной сигнал \mathbf{X} ($n \times k$)-матрицей, тогда сформируются k векторов размерностью m отсчетов каждый.

Пример 1.6. Суммирование $k = 6$ групп случайных чисел со стандартным равномерным распределением ($x \in R(0,1)$, см. подразд. 1.3.2) по $n = 4$ числа в каждой, с коэффициентами 1; 1/2; 1/4 выполняет программа

```
n=4; k=6
x=rand(n, k)
A=[1 1 1 1
  1/2 1/2 1/2 1/2           % размерность оператора
                                % m=3, n=4
  1/4 1/4 1/4 1/4]
y=A*x
```

В результате формируются $k = 6$ векторов y по $m = 3$ числа в каждом:

$$x = \begin{bmatrix} 0,5497 & 0,7537 & 0,0540 & 0,1299 & 0,3371 & 0,5285 \\ 0,9172 & 0,3804 & 0,5308 & 0,5688 & 0,1622 & 0,1656 \\ 0,2858 & 0,5678 & 0,7792 & 0,4694 & 0,7943 & 0,6020 \\ 0,7572 & 0,0759 & 0,9340 & 0,0119 & 0,3112 & 0,2630 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 \\ 0,5000 & 0,5000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0,2500 & 0,2500 & 0,2500 & 0,2500 \end{bmatrix};$$

$$y = \begin{bmatrix} 2,5100 & 1,7779 & 2,2979 & 1,1800 & 1,6048 & 1,5591 \\ 1,2550 & 0,8889 & 1,1490 & 0,5900 & 0,8024 & 0,7796 \\ 0,6275 & 0,4445 & 0,5745 & 0,2950 & 0,4012 & 0,3898 \end{bmatrix}$$

Линейные системы часто описываются оператором \mathbf{A} — квадратной матрицей размерностью $n \times n$, в каждом такте преобразующей n значений вектора \mathbf{X} в n значений вектора \mathbf{Y} . Таковы, например, генераторы *дискретного шума*, преобразующие значения, формируемые функцией `randn`, в числа с другими *корреляционными* свойствами.

Другое описание дискретных линейных систем базируется на разностном уравнении — дискретном аналоге дифференциального уравнения (1.7):

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_n y_0 = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_n x_0, \quad (1.11)$$

где x_i, y_i — отсчеты входного и выходного сигналов. Порядок разностного уравнения определяется наибольшим номером $k = j_{\max}$ коэффициента a_j . Разностное уравнение базируется на понятии k -й разности отсчетов:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \text{ — первая разность (правая) в точке } i; \\ \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \\ &= (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \text{ — вторая разность} \\ &\text{ в точке } i \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отношения $\Delta y_i / \Delta, \Delta^2 y_i / \Delta^2, \dots, \Delta$ — интервал дискретизации, рассматриваются как приближенные значения производных $y'(t), y''(t), \dots$, функции $y(t)$ в точке $t = t_i$; k -я разность выражается через $k + 1$ отсчет. Коэффициенты a_i, b_i в уравнениях (1.7) и (1.11) не равны.

Пусть отсчеты сигналов x_i, y_i и весовой функции $h_i, i = 0, 1, \dots$, взяты с одним и тем же интервалом Δ . Между коэффициентами разностного уравнения n -го порядка и значениями весовой функции h_0, h_1, \dots существует взаимно-однозначное соответствие:

$$b_0 = h_0;$$

$$b_k = h_k + \sum_{i=1}^k a_i h_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (1.12)$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i h_{n+k-i} = h_{n+k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

По системе n линейных уравнений (1.13) находят коэффициенты a_i , коэффициенты b_k рассчитываются последовательно по формуле (1.12).

Соотношения (1.12), (1.13) определяют особенность линейных систем k -го порядка: первые $2k + 1$ значения весовой функции (начиная с h_0) задают все последующие.

Из уравнения (1.11) следует, что очередное значение выходного сигнала

$$y_n = -a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - \dots - a_n y_0 + b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_n x_0, \quad (1.14)$$

т. е. в его формировании участвуют не только значения x_i входного сигнала, но и уже полученные значения y_j выходного сигнала. Формирование выходного сигнала суммами вида (1.14) определяет *рекурсивную фильтрацию* (рекуррентный алгоритм линейного преобразования). Рекурсивные фильтры называют также фильтрами с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-фильтрами). В отличие от них системы, реализующие дискретную свертку (1.9)

с конечным числом слагаемых, называют фильтрами с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ-фильтрами). Последовательности, формируемые дискретной сверткой (*скользящим суммированием*) и рекурсивной фильтрацией, относят соответственно к классам процессов *скользящего среднего и смешанным моделям авторегрессии и скользящего среднего*.

Если правая часть уравнения (1.11) записывается одним числом

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_n y_0 = b_0 x_n,$$

формируется процесс *авторегрессии* порядка n . БИХ-фильтрация имеет меньшую вычислительную сложность по сравнению с КИХ-фильтрацией, поэтому ее применение предпочтительно в бортовых системах.

Далее весовой вектор \mathbf{H} дискретной системы называется ее *импульсной характеристикой*.

1.2. Спектральный анализ линейных систем

1.2.1. Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа функции $x(t)$, возрастающей не слишком быстро ($x(t) < M e^{c_0 t}$, $t \geq 0$), и равной нулю при $t < 0$, называется преобразование

$$L_x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (1.15)$$

где $s = c + j\omega$ — комплексный аргумент.

Обратное преобразование

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} L_x(s) e^{ts} ds = L_x^{-1}(s) \quad (1.16)$$

возвращает функцию $x(t)$. В формуле (1.16) c_0 — абсцисса сходимости.

Сигналы и весовые функции в радиоэлектронике имеют затухающий характер, поэтому абсциссу сходимости c_0 можно положить равной нулю. Тогда комплексный аргумент s становится мнимым ($s = j\omega$), и соотношения (1.15), (1.16) принимают вид *прямого и обратного преобразования Фурье*

$$F_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.17)$$