Высшее профессиональное образование
БАКАЛАВРИАТ

В. М. КРУГЛОВ

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебник

Допущено
Учебно-методическим объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73
К84

Рецензенты:

профессор *Ю. С. Хохлов* (зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики Российского университета дружбы народов);
профессор *А. Н. Чупрунов* (кафедра математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета)

Круглов В. М.

К84 Случайные процессы : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / В. М. Круглов. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 336 с. — (Сер. «Бакалавриат»).
ISBN 978-5-7695-9578-3

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлениям подготовки «Математика», «Прикладная математика» (квалификация «бакалавр»).

В учебнике в доступной форме изложены основы общей теории случайных процессов, теории мартингалов и теории стохастического интегрирования вместе с необходимыми предварительными сведениями.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования.

УДК 519.216(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-7695-9578-3

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\blacktriangleright, \blacktriangleleft$ — начало, конец доказательства
a.b.c. — теорема с номером **c** находится в параграфе **b** главы **a**
(a.b.c) — формула с номером **c** находится в параграфе **b** главы **a**
п.в. — почти всюду
$f \wedge g$ — меньшее из двух чисел f и g
$f \vee g$ — большее из двух чисел f и g
f^+ — положительная часть функции f
f^- — отрицательная часть функции f
T — произвольное множество вещественных чисел
t^* — точная верхняя грань множества вещественных чисел T
t_* — точная нижняя грань множества вещественных чисел T
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел
$\mathbb{Q}_+$ — множество всех неотрицательных рациональных чисел
$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел (вещественная прямая)
$\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных вещественных чисел
A^c — дополнение множества A
$\mathbb{1}_A$ — индикаторная функция множества A
$\times_{t\in T}\Omega_t$ — прямое произведение множеств $\Omega_t, t \in T$
$\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство
2^Ω — класс всех подмножеств множества Ω
$\sigma(\mathcal{L})$ — сигма-алгебра, порожденная классом множеств $\mathcal{L}$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ — борелевская сигма-алгебра на $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевская сигма-алгебра на $\mathbb{R}$
$\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная вещественная прямая
$\overline{\mathbb{R}}^d$ — расширенное d-мерное евклидово пространство
$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ — борелевская сигма-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}$
$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d})$ — борелевская сигма-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}^d$
$(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство
$\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$ — прямое произведение сигма-алгебр $\mathcal{F}_t, t \in T$,
$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой
$\mu \otimes \mu'$ — прямое произведение мер μ и μ'
$V_a^b(f)$ — полная вариация функции $f(t), t \in [a, b]$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство

$(\times\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ — прямое произведение измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$

$\sigma(X_t, t \in T)$ — сигма-алгебра, порожденная случайными векторами X_t, $t \in T$

$\mathbb{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение $x, y \in \mathbb{R}^d$

Q_T — множество рациональных чисел, содержащихся в множестве T, и тех граничных точек t_* и t^*, которые принадлежат T

$f(t+), f(t-)$ — предел справа, слева функции f в точке t

X_{t+}, X_{t-} — предел справа, слева случайного процесса X в точке t

$\mathbb{F}^{(X)}$ — естественная фильтрация случайного процесса X

$\mathcal{G}^{(X)}$ — расширенная естественная фильтрация случайного процесса X

$\mathcal{B}(T)$ — борелевская сигма-алгебра на множестве T

$\mathcal{P}_{pg}$ — сигма-алгебра прогрессивно измеримых множеств

$\mathrm{proj}_\Omega C$ — проекция множества C на множество Ω

$\mathcal{P}$ — сигма-алгебра предсказуемых множеств

$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ — условное математическое ожидание случайной величины X относительно сигма-алгебры $\mathcal{G}$

$\|M\|_{2,\infty}$ — норма мартингала $M \in \mathcal{L}_2$

$[M, N]$ — квадратическая вариация мартингалов M и N

Φ — стандартная нормальная функция распределения

$\Pi = \{\Pi_t, t \in T\}$ — пуассоновский процесс

$B = \{B_t, t \in T\}$ — процесс броуновского движения

$\|X\|_{2,\infty}^{(M)}$ — норма случайного процесса $X \in \mathcal{L}_2(M)$

$(X \cdot M), \int X dM$ — стохастический интеграл

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание учебника составляет часть лекций о случайных процессах, которые автор читает на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Книга рассчитана на читателей, усвоивших общий курс теории вероятностей и впервые приступивших к изучению теории случайных процессов.

Цель учебника состоит в том, чтобы в доступной форме познакомить читателя с основными понятиями теории случайных процессов. В качестве «вершины», которая венчает учебник, выбрана теория стохастического интегрирования. Причина такого выбора продиктована многочисленными применениями стохастического анализа в экономике, технике и во многих научных направлениях. В качестве примеров можно сослаться на монографию Ван Кампена [8] о применении стохастического анализа в физике и химии и на курс лекций А. В. Мельникова [39] о роли стохастического интегрирования в построении современной теории финансовых рынков.

Наилучший способ проникнуть в суть теории случайных процессов состоит в привлечении методов теории меры. По этой причине в первой главе приведены необходимые сведения из теории меры и интеграла. Содержание этой главы не сводится к простому перечислению необходимых утверждений. Читатель несомненно заметит, что доказательства и конструкции, которые приведены в этой главе, составляют тот инструментарий, с помощью которого исследуются многие свойства случайных процессов.

Вторая глава дает общее представление о понятии случайного процесса. Обсуждаются общие свойства случайных процессов, доказывается теорема существования случайных процессов с данными распределениями. В третьей главе обсуждается понятие мартингала и его обобщений. Мартингалы составляют один из важнейших классов случайных процессов. Теория мартингалов лежит в основе построения современной теории стохастического интегрирования. Мартингальные методы находят применение за пределами теории случайных процессов, например, в классическом математическом анализе (см. монографию Ф. Басс [2]).

Случайные процессы с независимыми приращениями обсуждаются в четвертой главе. Знаменитыми представителями случайных процессов с независимыми приращениями являются процесс броуновского движения и процесс Пуассона. Этим процессам посвящены пятая и шестая главы.

Стохастическое интегрирование изложено в седьмой главе. В качестве интегрируемых процессов и интеграторов выступают соответственно предсказуемые процессы и квадратично интегрируемые, непрерывные справа мартингалы. Изложенная теория стохастического интегрирования достаточна для многих приложений.

В восьмой главе приведены некоторые применения стохастических интегралов. Среди прочего вычислена знаменитая формула Блэка-Шоулса для справедливой цены европейского опциона. Дано вероятностное решение уравнения теплопроводности. Обсуждаются начала теории стохастических дифференциальных уравнений.

В списке литературы приведены источники, на которые имеются прямые ссылки в тексте. Ограниченный объем учебника не позволил обсудить ряд важных классов случайных процессов. Пришлось ограничиться только упоминанием некоторых учебников и монографий о таких случайных процессах. Некоторые источники можно назвать «древними». С такими источниками стоит познакомиться. Именно они, чаще всего, содержат «забытые» идеи, которые могут стать предметом собственных исследований читателя.

Автор выражает благодарность студентам и аспирантам, которые прослушали курс лекций и приняли участие в редактировании учебника. Особая благодарность рецензентам — профессорам Алексею Николаевичу Чупрунову и Юрию Степановичу Хохлову.

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В главе собраны сведения из теории множеств и теории интегрирования, необходимые для изучения случайных процессов.

1.1. Операции с множествами

Напомним некоторые сведения из наивной (неаксиоматической) теории множеств. Недостаток этой теории состоит в том, что отсутствует логически безупречное определение понятия множества. Приводимое далее «определение» было предложено Кантором (Moritz Benedict Cantor) — основателем теории множеств. Оно вполне удовлетворительно для наших целей.

1.1.1. Понятие множества. Множеством называется любое объединение в одно целое определенных объектов. Объекты, составляющие множество, называются точками. Любая часть точек данного множества называется его подмножеством. Множество, не содержащее точек, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Примерами могут служить множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, множество $\mathbb{Z}$ всех комплексных чисел, множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, множество $\mathbb{Q}_+$ всех неотрицательных рациональных чисел, множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел, множество $\mathbb{R}_+$ всех неотрицательных вещественных чисел. Буквой T будет обозначаться произвольное множество вещественных чисел.

В этом подразделе предполагается, что все рассматриваемые множества являются подмножествами данного множества, которое мы обозначим прописной греческой буквой Ω (омега). Его точки будут обозначаться строчной греческой буквой ω (омега). Отношения между точками и множествами, а также между множествами мы будем записывать с помощью знаков Пеано (Giuseppe Peano). А именно, если ω и A — точка и подмножество множества Ω, то записи $\omega \in A$ и $\omega \notin A$ соответственно означают, что ω принадлежит A и ω не принадлежит A. Если A и B — подмножества множества Ω, то запись $A \subseteq B$ означает, что A является частью (подмножеством) B. Чтобы подчеркнуть, что A является частью B и не совпадает с ним, мы будем писать $A \subset B$.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних точек. Для доказательства равенства множеств A и B достаточно убедиться, что каждое из них является частью другого.

Множество, точками которого являются подмножества некоторого множества, называется *классом* или *семейством* множеств.

Объединением множеств из непустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ называется множество точек из Ω, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из множеств класса (семейства) $\mathcal{L}$, и обозначается $\cup_{A\in\mathcal{L}}A$. В случае пустого класса $\mathcal{L}$ мы полагаем $\cup_{A\in\mathcal{L}}A = \varnothing$.

Пересечением множеств из непустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ называется множество точек из Ω, каждая из которых принадлежит всем множествам из класса $\mathcal{L}$, и обозначается $\cap_{A\in\mathcal{L}}A$. В случае пустого класса (семейства) $\mathcal{L}$ мы полагаем $\cap_{A\in\mathcal{L}}A = \Omega$.

Разностью множеств A и B называется множество точек из A, которые не принадлежат B, и обозначается $A \setminus B$. Разность $\Omega \setminus A$ называется *дополнением* множества A и обозначается A^c.

Объединение $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ называется *симметрической разностью* множеств A и B и обозначается $A \triangle B$.

1.1.2. Теорема. *Операции с множествами связаны между собой правилами де Моргана (Augustus De Morgan).*

$$(\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c = \cap_{A\in\mathcal{L}}A^c, (\cap_{A\in\mathcal{L}}A)^c = \cup_{A\in\mathcal{L}}A^c.$$

► Докажем, например, первое равенство. Если $\omega \in (\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$, то $\omega \notin \cup_{A\in\mathcal{L}}A$ и, следовательно, $\omega \notin A$ для любого $A \in \mathcal{L}$. Поэтому $\omega \in A^c$ для любого $A \in \mathcal{L}$ и, следовательно, $\omega \in \cap_{A\in\mathcal{L}}A^c$. Аналогично можно доказать, что $\cap_{A\in\mathcal{L}}A^c \subseteq (\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$. Множества $\cap_{A\in\mathcal{L}}A^c$ и $(\cup_{A\in\mathcal{L}}A)^c$ равны, так как являются частями друг друга. ◄

Операции объединения и пересечения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Свойство *коммутативности* состоит в том, что объединение и пересечение множеств из данного класса не зависят от их «расположения» в классе. Например, $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$.

Если класс $\mathcal{L}$ представляет собой объединение классов $\mathcal{L}_t$, $t \in T$, то свойство *ассоциативности* выражается равенствами

$$\cup_{A\in\mathcal{L}} A = \cup_{t\in T}(\cup_{A\in\mathcal{L}_t} A), \ \ \cap_{A\in\mathcal{L}} A = \cap_{t\in T}(\cap_{A\in\mathcal{L}_t} A).$$

Пусть B — множество и $\mathcal{L}$ — класс множеств. Свойство *дистрибутивности* выражается равенствами

$$B \cup (\cap_{A\in\mathcal{L}} A) = \cap_{A\in\mathcal{L}}(B \cup A), \ \ B \cap (\cup_{A\in\mathcal{L}} A) = \cup_{A\in\mathcal{L}}(B \cap A).$$

Последовательность $\{A_n\}_{n\geq 1}$ множеств называется *возрастающей* (*убывающей*), если $A_n \subseteq A_{n+1}$ ($A_{n+1} \subseteq A_n$) для всех $n \in \mathbb{N}$. Тот факт, что последовательность $\{A_n\}_{n\geq 1}$ возрастает (убывает) обозначается следующим образом $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$).

Пусть дано подмножество A множества Ω. Функция $\mathbb{1}_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$, если $\omega \in A^c$, называется *индикаторной функцией* множества A.

Операции с множествами можно выразить в терминах их индикаторных функций. Например, соотношения $A \subseteq B$, $A = B$, $A \cap B = \varnothing$ между множествами A и B эквивалентны соотношениям $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0$.

1.1.3. Определение. Пусть дан класс множеств $\Omega_t, t \in T$. Множество функций ω_t, $t \in T$, со значениями $\omega_t \in \Omega_t$ называется прямым произведением множеств Ω_t, $t \in T$, и обозначается $\times_{t\in T}\Omega_t$. Прямое произведение $\times_{t\in T} A_t$ подмножеств $A_t \subseteq \Omega_t$ называется прямоугольником со сторонами A_t, $t \in T$.

Пустое множество $\varnothing$ можно рассматривать как прямоугольник, некоторые стороны которого являются пустыми множествами.

1.1.4. *Пример.* Если $T = \{1, \ldots, d\}$, то прямое произведение множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_d$ совпадает с множеством наборов $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$, $\omega_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, d$, и обозначается $\times_{t=1}^{d}\Omega_t$. Оно представляет собой обобщение евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, которое является произведением d копий вещественной прямой $\mathbb{R}$.

1.1.5. *Пример.* Прямое произведение множеств $\Omega_k, k \in \mathbb{N}$, состоит из последовательностей $(\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)$, $\omega_k \in \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, и обозначается $\times_{k=1}^{\infty}\Omega_k$.

Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа точек. Пустое множество считается конечным. Множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

1.1.6. Определение. Множество A называется счетным, если его можно записать в виде последовательности $\{a_n\}_{n\geq 1}$. При этом понадобятся все натуральные числа.

1.1.7. Теорема. (i) *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.* (ii) *Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.* (iii) *Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.* (iv) *Объединение счетного числа конечных множеств конечно или счетно.* (v) *Прямое произведение конечного числа счетных множеств счетно.*

► Доказательство этой теоремы можно найти в учебниках по математическому анализу. ◄

Из теоремы следует, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ эквивалентны. Множество $\mathbb{Q} = \{\pm m/n : m \in \{0\}\cup N, n \in \mathbb{N}\}$ всех рациональных чисел счетно. Оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Множество *двоично рациональных* чисел $2^{-n}k$, $k = 0, \ldots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, будучи объединением конечных множеств $\{k2^{-n} : k = 0, \ldots, 2^n\}, n \in \mathbb{N}$, счетно.

1.1.8. Определение. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Каждое из множеств $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{R}^\infty = \times_{n=1}^\infty A_n$ с $A_n = \mathbb{R}$, является несчетным.

1.1.9. Определение. Множество $A \subseteq \mathbb{R}^d$ называется выпуклым, если $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ для любых $x, y \in A, \alpha \in (0,1)$.

Следующий список содержит все выпуклые множества на вещественной прямой: $\varnothing, \{a\}, (a,b), (a,b], [a,b), [a,b], (-\infty,a), (-\infty, a], (a,\infty), [a,\infty), \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Любое бесконечное выпуклое множество является несчетным.

1.2. Классы множеств

Напомним, что классом множеств называется множество, точками которого являются подмножества некоторого множества. Обозначим 2^Ω класс всех подмножеств множества Ω.

1.2.1. Определение. Класс $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$ называется π-классом, если $A\cap B \in \mathcal{E}$ для любых $A, B \in \mathcal{E}$. Класс $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ называется алгеброй, если множества $\Omega, A^c, A\cup B$ принадлежат $\mathcal{A}$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$.

Класс $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ называется сигма-алгеброй (σ-алгеброй), если он является алгеброй и содержит объединение счетного числа любых своих множеств. Класс $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$ называется λ-классом, если $\Omega \in \mathcal{D}$ и $A\setminus B \in \mathcal{D}$, $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}$ для любых $A, B, A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, $B \subseteq A, A_n \uparrow$.

Класс 2^Ω является примером π/λ-класса, алгебры, σ-алгебры.

1.2.2. Теорема. *Если некоторый класс $\mathcal{L} \subseteq 2^\Omega$ множеств является π-классом и λ-классом, то он является сигма-алгеброй.*

► Если $A, B \in \mathcal{L}$, то $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{L}$. Пусть $A_n \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$.

Множества $B_n = \cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{L}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют возрастающую последовательность. Так как $\mathcal{L}$ является λ-классом, то $\cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{L}$. Поэтому $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{L}$, так как $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$. ◄

1.2.3. Теорема. *Пересечение произвольного числа λ/π-классов, алгебр, сигма-алгебр является соответственно λ/π-классом, алгеброй, сигма-алгеброй.*

► Утверждение следует непосредственно из определений перечисленных классов. ◄

1.2.4. Определение. Пересечение всех сигма-алгебр, содержащих данный класс $\mathcal{L} \subseteq 2^\Omega$, называется сигма-алгеброй, порожденной классом $\mathcal{L}$, и обозначается $\sigma(\mathcal{L})$.

Сигма-алгебра, порожденная классом $\mathcal{L}$, также называется *минимальной σ-алгеброй*, содержащей класс $\mathcal{L}$. Минимальная сигма-алгебра существует. Действительно, σ-алгебра 2^Ω содержит класс $\mathcal{L}$. Далее следует применить теорему 1.2.3.

По аналогии с сигма-алгеброй, порожденной классом $\mathcal{L}$, можно определить и доказать существование *минимальной алгебры* и *минимального π/λ-класса,* содержащих данный класс $\mathcal{L}$.

1.2.5. Определение. Сигма-алгебра, порожденная классом открытых множеств евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, называется борелевской сигма-алгеброй и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ называются борелевскими множествами.

Напомним, что подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ называется *открытым,* если его можно представить в виде объединения некоторого конечного или бесконечного числа открытых шаров $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\| < r\}$. Точка $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ называется *центром* открытого шара, число $r > 0$ называется *радиусом* открытого шара. Величина $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$ называется *расстоянием* между точками $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Множество $F \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *замкнутым*, если его дополнение F^c является открытым множеством. Из этого определения следует, что множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}^d$ открыты и замкнуты. С помощью правил де Моргана можно убедиться, что борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ порождается классом замкнутых множеств.

Наряду с множеством $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел нам придется иметь дело с множеством $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Множества $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ называют *вещественной прямой* и *расширенной вещественной прямой.* Множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ называется *открытым,* если его можно представить в виде объединения конечного или бесконечного числа множеств вида $(a, b), [-\infty, a), (a, \infty], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Обозначим $\mathcal{M}_1$ класс таких множеств с $a, b \in Q$. Нетрудно видеть, что любое открытое множество $O \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ можно представить в виде объединения конечного или счетного числа множеств из класса $\mathcal{M}_1$. Множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если его дополнение $F^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus F$ является открытым множеством. Сигма-алгебра $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, порожденная классом открытых в $\overline{\mathbb{R}}$ множеств, называется борелевской сигма-алгеброй расширенной вещественной прямой.

Множество $\overline{\mathbb{R}}^d$ точек $(a_1, \ldots, a_d), a_k \in \overline{\mathbb{R}}$, называется *расширенным евклидовым пространством.* Множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ называется *открытым*, если его можно представить в виде объединения конечного или бесконечного числа прямоугольников $\times_{k=1}^d O_k$ с открытыми сторонами $O_1, \ldots, O_d \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Обозначим $\mathcal{M}_d$ класс множеств $\times_{k=1}^d O_k$, где $O_k \in \mathcal{M}_1$. Класс $\mathcal{M}_d$ состоит из счетного числа множеств. Легко убедиться, что любое открытое множество $O \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ можно представить в виде объединения конечного или счетного числа множеств из $\mathcal{M}_d$. Множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ называется *замкнутым,* если его дополнение $F^c = \overline{\mathbb{R}}^d \setminus F$ является открытым множеством. Обозначим $\mathcal{K}_d$ класс множеств $\overline{\mathbb{R}}^d \setminus O$, где $O \in \mathcal{M}_d$. Легко видеть, что любое замкнутое множество $F \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$ можно представить в виде пересечения конечного или счетного числа множеств из $\mathcal{K}_d$.

Сигма-алгебра $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$, порожденная классом всех открытых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств, называется борелевской сигма-алгеброй расширенного евклидова пространства $\overline{\mathbb{R}}^d$. Множества из $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$ называются *борелевскими множествами.* С помощью правил де Моргана можно убедиться, что сигма-алгебра $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d)$ порождается классом всех замкнутых в $\overline{\mathbb{R}}^d$ множеств.

Расширенное евклидово пространство обладает свойством компактности.

1.2.6. Теорема. *Пересечение $\cap_{t \in T} F_t$ любого числа замкнутых множеств $F_t \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d, t \in T$, содержит, по крайней мере одну точку, если $\cap_{k=1}^n F_{t_k} \neq \varnothing$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$.*

► Предположим, что $\cap_{t\in T} F_t = \varnothing$. По правилу де Моргана выполняется равенство $\overline{\mathbb{R}}^d = \cup_{t\in T} F_t^c$. Найдется конечное число множеств $F_{t_1}^c, \ldots, F_{t_n}^c$ со свойством $\cup_{k=1}^n F_{t_k}^c = \overline{\mathbb{R}}^d$. В этом можно убедиться, повторив, почти дословно, доказательство классической теоремы Бореля-Лебега (см. [52], с. 181) о покрытии. По правилу де Моргана, мы получим невозможное равенство $\cap_{k=1}^n F_{t_k} = \varnothing$. ◄

Следующая теорема Серпинского [47] помогает упростить доказательства многих трудных утверждений.

1.2.7. Теорема. *Пусть даны* π*-класс* $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ *и* λ*-класс* $\mathcal{D} \subseteq 2^\Omega$. *Если* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, *то* $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$.

► Пусть $\lambda(\mathcal{C})$ обозначает λ-класс, порожденный π-классом $\mathcal{C}$. Возьмем произвольное множество $A \in \mathcal{C}$ и обозначим $\mathcal{L}(A)$ класс множеств $B \in \lambda(C)$ таких, что $A \cap B \in \lambda(\mathcal{C})$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}(A)$ является π-классом. Класс $\mathcal{L}(A)$ содержит π-класс $\mathcal{C}$ и, следовательно, $\mathcal{L}(A) = \lambda(\mathcal{C})$. Возьмем произвольное множество $B \in \lambda(\mathcal{C})$ и обозначим $\mathcal{M}(B)$ класс множеств $D \in \lambda(\mathcal{C})$ таких, что $B \cap D \in \lambda(\mathcal{C})$. Он является λ-классом. Так как $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(B)$, то $\mathcal{M}(B) = \lambda(\mathcal{C})$, другими словами, $\lambda(\mathcal{C})$ является π-классом. По теореме 1.2.2 класс $\lambda(\mathcal{C})$ является σ-алгеброй. ◄

1.2.8. Теорема. *Пусть даны множество* $B \in 2^\Omega$ *и класс* $\mathcal{L} \subseteq 2^\Omega$. *Если* $\mathcal{L}$ *является алгеброй, сигма-алгеброй,* π/λ*-классом, то класс* $B \cap \mathcal{L} = \{B \cap A : A \in \mathcal{L}\} \subseteq 2^B$ *является соответственно алгеброй, сигма-алгеброй,* π/λ*-классом.*

► Утверждение непосредственно следует из определений перечисленных классов множеств. ◄

1.2.9. Определение. Пусть даны множества Ω и Ω', класс $\mathcal{L}' \subseteq 2^{\Omega'}$, отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$. Множество $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\}$ называется прообразом множества $A' \subseteq \Omega'$ и обозначается $f^{-1}(A')$ или $\{f \in A'\}$. Класс $f^{-1}(\mathcal{L}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{L}'\}$ называется прообразом класса $\mathcal{L}'$.

Чтобы подчеркнуть связь с отображением, множество $f^{-1}(A')$ также называется прообразом множества A' относительно отображения f. Аналогично, класс $f^{-1}(\mathcal{L}')$ называется прообразом класса $\mathcal{L}'$ относительно отображения f. Он также называется *классом, порожденным отображением* f.

1.2.10. Теорема. *Пусть даны отображение* f *множества* Ω *в множество* Ω' *и некоторый класс* $\mathcal{L}' \subseteq 2^{\Omega'}$. *Если* $\mathcal{L}'$ *является алгеброй,* π/λ*-классом, сигма-алгеброй, то класс* $f^{-1}(\mathcal{L}') \subseteq 2^\Omega$ *является соответственно* алгеброй, π/λ*-классом, сигма-алгеброй.*

► Все утверждения следуют из следующих свойств прообразов:

$$f^{-1}(\Omega') = \Omega, f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B'),$$
$$\Omega \setminus f^{-1}(A') = f^{-1}(\Omega' \setminus A'), f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} A'_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A'_n),$$

для любых множеств $A', B', A'_n \subseteq \Omega'$, $n \in \mathbb{N}$, с сохранением свойства монотонности: если $A'_n \uparrow$ ($A'_n \downarrow$), то $f^{-1}(A'_n) \uparrow$ ($f^{-1}(A'_n) \downarrow$). ◄

1.2.11. Теорема. *Пусть даны отображение $f : \Omega \to \Omega'$ множества Ω в множество Ω' и некоторый класс $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$. Если класс $\mathcal{L}$ является алгеброй, сигма-алгеброй, π/λ-классом, то класс $\{A' \subseteq \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathcal{L}\} \subseteq 2^{\Omega'}$ является соответственно алгеброй, сигма-алгеброй, π/λ-классом.*

► Теорема следует из знакомых свойств прообразов относительно отображения f, перечисленных в предыдущей теореме. ◄

1.2.12. Определение. Пара $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящая из некоторого множества Ω и некоторой сигма-алгебры $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, называется измеримым пространством. Множества из $\mathcal{F}$ называются измеримыми множествами. Пусть дано семейство $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, измеримых пространств. Прямоугольник $\times_{t\in T} A_t$ называется измеримым, если $A_t \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in T$. Сигма-алгебра, порожденная классом измеримых прямоугольников со сторонами $A_t = \Omega_t$ за исключением конечного числа $t \in T$, называется прямым произведением сигма-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in T$, и обозначается $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. Измеримое пространство $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ называется прямым произведением измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$.

Если $T = \{1, \ldots, d\}$ или $T = \{t_k\}_{k\geq 1}$, то прямое произведение измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$ обозначают $(\times_{k=1}^{d}\Omega_k, \otimes_{k=1}^{d}\mathcal{F}_k)$ и $(\times_{k=1}^{\infty}\Omega_{t_k}, \otimes_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_{t_k})$.

1.2.13. Определение. Пусть $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ — прямое произведение измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$. Для любых $U \subset T$ и $A \subseteq \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$ множество $C_U(A)$ функций из $\times_{t\in T}\Omega_t$, сужения которых на U принадлежат A, называется цилиндрическим множеством с основанием A. Если U — конечное множество, то $C_U(A)$ называется цилиндрическим множеством с конечномерным основанием.

Прямое произведение $\times_{t\in T}\Omega_t$ является цилиндрическим множеством. Из равенства $(C_U(A))^c = C_U(A^c)$ следует, что дополнение цилиндрического множества суть цилиндрическое множество.

1.2.14. Теорема. *Пусть* $(\times_{t\in T}\Omega_t, \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t)$ *— прямое произведение бесконечного числа измеримых пространств* $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t\in T$. *Класс* $\mathcal{A}$ *цилиндрических множеств с конечномерными основаниями является алгеброй и* $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$.

► Нам нужно доказать только то, что класс $\mathcal{A}$ содержит объединение любых своих множеств $C_U(A)$ и $C_V(B)$, где $U = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $V = \{t'_1, \ldots, t'_m\}$, $A \in \otimes_{k=1}^{n}\mathcal{F}_{t_k}$, $B \in \otimes_{k=1}^{m}\mathcal{F}_{t'_k}$. Обозначим отображения $\pi_1\colon \times_{t\in U\cup V}\Omega_t \to \times_{t\in U}\Omega_t$ и $\pi_2\colon \times_{t\in U\cup V}\Omega_t \to \times_{t\in V}\Omega_t$, переводящие функцию ω_t, $t \in U\cup V$, в ее сужения на множества U и V соответственно. Если $\pi_1^{-1}(A), \pi_2^{-1}(B) \in \otimes_{t\in U\cup V}\mathcal{F}_t$ и выполняются равенства $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A), C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B)) = C_V(B)$, то

$$\begin{aligned} C_U(A) \cup C_V(B) &= C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) \cup C_{U\cup V}(\pi_2^{-1}(B)) \\ &= C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A) \cup \pi_2^{-1}(B)) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Докажем соотношения, которыми мы воспользовались. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \otimes_{t\in U}\mathcal{F}_t$, для которых $\pi_1^{-1}(A) \in \otimes_{t\in U\cup V}\mathcal{F}_t$ и $C_{U\cup V}(\pi_1^{-1}(A)) = C_U(A)$. Класс $\mathcal{L}$ содержит произвольный измеримый прямоугольник $D = \times_{k=1}^{n} D_{t_k}$, так как $\pi_1^{-1}(D) = \times_{t\in U\cup V} C_t$, где $C_t = D_{t_k}$ для всех $t = t_k \in U$ и $C_t = \Omega_k$ для всех $t = t_k \notin U$. Множества $C_{U\cup V}(\times_{t\in U\cup V} C_t)$ и $C_U(\times_{k=1}^{m} D_{t_k})$ совпадают по определению цилиндрического множества. Нетрудно убедиться, что класс $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй. Алгебра $\mathcal{A}$ содержится в $\otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$ и содержит любой прямоугольник $\times_{t\in T} A_t$ со сторонами $A_t \in \mathcal{F}_t, A_t = \Omega_t$ для всех $t \in T$ за исключением конечного числа. Поэтому $\sigma(\mathcal{A}) = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$. ◄

1.3. Функции множеств

Исследуем некоторые свойства вещественных функций, определенных на произвольной алгебре $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. Напомним, что 2^{Ω} обозначает класс всех подмножеств множества Ω.

1.3.1. Определение. Функция $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется зарядом, если принимает только одно из значений $\pm\infty$, $\mu\{\varnothing\} = 0$, счетно аддитивна: $\mu\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu\{A_n\}$ для любых попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Заряд называется конечным, если $|\mu\{A\}| < \infty$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Заряд называется счетно конечным, если существуют множества $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, такие, что $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *и* $|\mu\{A_n\}| < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Неотрицательный заряд называется мерой.

Любой заряд μ обладает свойством *конечной аддитивности*: для любых попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\mu\{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu\{A_k\}$. Из этого свойства заряда следует, что $|\mu\{A\}| < \infty$ и $\mu\{B \setminus A\} = \mu\{B\} - \mu\{A\}$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $|\mu\{B\}| < \infty$.

1.3.2. Теорема. *Любой заряд* $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *обладает свойствами:*

(i) *Если* $\mathcal{A} \ni A_n \uparrow, A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\{A_n\}$.

(ii) *Если* $\mathcal{A} \ni A_n \downarrow, A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, |\mu\{A_m\}| < \infty$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$, *то* $\mu\{A\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\{A_n\}$.

▶ Утверждение (i) называется свойством *непрерывности заряда снизу.* Множества $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, принадлежат $\mathcal{A}$, попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = A_n$. С учетом этих наблюдений, мы получим

$$\mu\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{B_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\{B_k\} = \lim_{n\to\infty} \mu\{A_n\}.$$

Утверждение (ii) называется свойством *непрерывности заряда сверху.* Оно вытекает из утверждения (i). ◀

Утверждение (ii) выполняется, в частности, для любой убывающей последовательности $\{A_n\}_{n\geq 1}$ множеств $A_n \in \mathcal{A}$ с пустым пересечением $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. В этом случае оно называется свойством *непрерывности заряда сверху на пустом множестве.*

1.3.3. Теорема. *Конечно аддитивная функция* $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *является зарядом тогда и только тогда, когда она непрерывна сверху на пустом множестве.*

▶ Обратим внимание, что функция μ не принимает бесконечных значений. В силу предыдущей теоремы требуется доказать только достаточность условия. Так как $|\mu\{\varnothing\}| < \infty$ и

$\mu\{\varnothing\} = \mu\{\varnothing\} + \mu\{\varnothing\}$, то $\mu\{\varnothing\} = 0$. Пусть $A_n \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \varnothing$, $n \neq m$. Заметим, что $B_n = A \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $B_n \downarrow$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Поэтому

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu\{B_n\} = \lim_{n\to\infty} \Big(\mu\{A\} - \sum_{k=1}^{n} \mu\{A_k\}\Big) =$$
$$= \mu\{A\} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{A_k\}. \quad ◀$$

1.3.4. Теорема. *Любая мера* $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ *обладает свойствами:*

(i) *Если* $A, B \in \mathcal{A}$ *и* $A \subset B$, *то* $\mu\{A\} \leq \mu\{B\}$.

(ii) *Если* $A, B \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A \cup B\} \leq \mu\{A\} + \mu\{B\}$.

(iii) *Если* $A_n \in \mathcal{A}, A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *то* $\mu\{A\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$.

▶ Утверждения (i) и (ii) называются свойствами *монотонности* и *полуаддитивности* меры. Они являются следствиями равенства $\mu\{B\} = \mu\{A\} + \mu\{B \setminus A\}$. Утверждение (iii) называется свойством *счетной полуаддитивности* меры. Заметим, что множества $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$, $n \geq 2$, принадлежат $\mathcal{A}$. Они попарно не пересекаются, $B_n \subset A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Отсюда и из (i) следует, что $\mu\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\{B_n\} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\{A_n\}$. ◀

1.3.5. Теорема. *Пусть заряд* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определен на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. *Предположим, что* $\mathcal{F}$ *порождена некоторым* π*-классом* $\mathcal{C}$ *и существуют множества* $E_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *такие, что* $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *и* $|\mu\{E_n\}| < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда заряд* μ *однозначно определяется своими значениями на множествах из* $\mathcal{C}$.

▶ Требуется доказать равенство $\mu = \nu$, если ν — другой заряд, определенный на $\mathcal{F}$, такой, что $\nu\{A\} = \mu\{A\}$ для всех $A \in \mathcal{C}$. Можно считать, что множества $E_n, n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Достаточно доказать равенство $\mu\{A \cap E_n\} = \nu\{A \cap E_n\}$ для любых $A \in \mathcal{F}$ и $n \in \mathbb{N}$, так как $\mu\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{A \cap E_n\}$ и $\nu\{A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\{A \cap E_n\}$. Поэтому можно считать, что заряды μ и ν конечны. Нетрудно проверить, что класс $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : \mu\{A\} = \nu\{A\}\}$ является λ-классом. Он содержит π-класс $\mathcal{C}$. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{C})$. По условию $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$. ◀

1.3.6. Теорема. *Пусть счетно конечная мера* $\mu\colon \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *определена на некоторой сигма-алгебре* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. *Предположим, что* $\mathcal{F}$ *порождена некоторой алгеброй* $\mathcal{A}$. *Тогда мера* μ *однозначно определяется значениями* $\mu\{A\}, A \in \mathcal{A}$.

▶ Доказательство похоже на доказательство предыдущей теоремы. См. также [53], § 13. ◀

Предположим, что мера определена на некотором классе множеств. Возникает естественный вопрос о продолжении этой меры на более богатый класс множеств.

1.3.7. Теорема. *Пусть счетно конечная мера* $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на некоторой алгебре* $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$. *Тогда существует единственная мера* $\overline{\mu}\colon \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$, *совпадающая с* μ *на* $\mathcal{A}$.

▶ Доказательство можно найти в [53], § 13. ◀

1.3.8. Определение. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, *состоящая из множества* Ω, некоторой сигма-алгебры $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ и меры $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$, называется пространством с мерой. Пространство с мерой называется полным, если $2^{A} \subseteq \mathcal{F}$ для любого $A \in \mathcal{F}, \mu\{A\} = 0$.

Имеется правило (см. [53], § 13) по которому любое пространство с мерой можно пополнить.

Неубывающая, непрерывная справа функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *функцией распределения.*

1.3.9. Теорема. *Для любой функции распределения* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *существует единственная счетно конечная мера* $\mu_F\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *со свойством* $\mu_F\{(a, b]\} = F(b) - F(a)$ *для любых* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

▶ Определим функцию $\mu_F\{(a, b]\} = F(b) - F(a)$ на классе множеств вида $(a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$. Можно доказать (см. [53], § 15), что она счетно аддитивна и допускает расширение на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ◀

Мера μ_F называется *мерой Лебега — Стилтьеса* в честь Лебега (Henri Léon Lebesgue) и Стилтьеса (Thomas Joannes Stieltjes).

1.3.10. *Пример.* Мера $\mu_F\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, порождаемая функцией $F(x) = x, x \in \mathbb{R}$, называется *мерой Лебега.*

1.3.11. Определение. Мера $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется регулярной, если для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ выполняются равенства $\mu\{A\} = \inf\{\mu\{O\},\ A \subseteq O : \mathbb{R}^d \supseteq O$ — открытое множество$\}$ и $\mu\{A\} = \sup\{\mu\{F\}, A \supseteq F : \mathbb{R}^d \supseteq F$ — замкнутое множество$\}$.

1.3.12. Теорема. *Любая мера* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ *регулярна.*

► Обратим внимание, что речь идет о конечной мере μ. Ранее упоминалось, что класс всех замкнутых множеств $F \subseteq \mathbb{R}^d$ является π-классом и порождает сигма-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, для которых теорема справедлива. Достаточно доказать равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Нетрудно доказать, что $\mathcal{L}$ является λ-классом и содержит класс замкнутых множеств. По теореме 1.2.7 выполняется равенство $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. ◄

1.3.13. Теорема. *Для любой меры* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$, *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *найдется компактное множество* $K \subseteq A$ *такое, что* $\mu\{A \setminus K\} < \varepsilon$.

► Напомним, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ компактно, если оно ограничено и замкнуто. Множество $K_n = [-n, n] \times \cdots \times [-n, n] \subset \subset \mathbb{R}^d$ компактно, $K_n^c \downarrow$ при $n \uparrow$ и $\cap_{n=1}^{\infty} K_n^c = \varnothing$. По теореме 1.3.2 мы получим, что $\lim_{n\to\infty} \mu\{K_n^c\} = 0$. Найдется n_0 такое, что $\mu\{K_{n_0}^c\} < \varepsilon/2$. По теореме 1.3.12 существует замкнутое множество $F \subseteq A$ со свойством $\mu\{A \setminus F\} < \varepsilon/2$. Компактное множество $K = F \cap K_{n_0}$ удовлетворяет условию $\mu\{A \setminus K\} < \varepsilon$. ◄

1.4. Измеримые функции

1.4.1. Определение. Пусть даны два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\Omega', \mathcal{F}')$. Отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$ называется измеримым, если $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ для любого $A' \in \mathcal{F}'$.

Чтобы подчеркнуть связь с другой сигма-алгеброй $\mathcal{F}'$, измеримое отображение f называют $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$*-измеримым.* Измеримое отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$ также называется *измеримой функцией* или, более подробно, измеримой функцией со значениями в Ω'. Например, отображение $f(\omega) = \omega'$, переводящее все точки $\omega \in \Omega$ в некоторую фиксированную точку $\omega' \in \Omega'$, измеримо, если $\{\omega'\} \in \mathcal{F}'$. Понятие измеримого отображения (функции) представляет собой обобщение понятия борелевской функции. Напомним, что отображение $f\colon \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}^{d'}$ называется *борелевской функцией*, если $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ для любого $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{d'})$. Размерности d и d' евклидовых пространств $\mathbb{R}^d$ и $\overline{\mathbb{R}}^{d'}$ могут быть любыми натуральными числами.