Высшее профессиональное образование
БАКАЛАВРИАТ

ГЕОМЕТРИЯ

В ДВУХ ТОМАХ

ТОМ 2

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением по образованию
в области подготовки педагогических кадров в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению «Педагогическое образование»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Г361

Авторы:
Н. И. Гусева, Н. С. Денисова, Л. А. Игнаточкина, А. В. Никифорова, О. Ю. Тесля

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Рылов* (кафедра «Математика» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации);
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. В. Савинов* (кафедра геометрии Московского педагогического государственного университета)

Г361 **Геометрия**: учеб. пособие для студ. учреждений высш. пед. проф. образования: в 2 т. Т. 2 / [Н. И. Гусева, Н. С. Денисова, Л. А. Игнаточкина и др.]. — М.: Издательский центр «Академия», 2013. — 448 с. — (Сер. Бакалавриат).

ISBN 978-5-7695-8804-4

Учебное пособие создано в соответствии с Федеральным образовательным стандартом по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Математика» (квалификация «бакалавр»).

Учебное пособие содержит материал по проективной геометрии, методам изображений, основаниям геометрии, неевклидовым геометриям и дифференциальной геометрии.

В пособие включены примеры, помогающие студентам освоить теоретический материал. В конце каждой главы помещены основные задачи соответствующего раздела, а также задачи основных типов с решениями.

Для студентов учреждений высшего педагогического профессионального образования.

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73

ISBN 978-5-7695-8804-4 (т. 2)
ISBN 978-5-7695-8803-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие наследует и в то же время развивает и совершенствует традиции, заложенные в широко известных учебниках по геометрии, например в двухтомнике «Геометрия» Л. С. Атанасяна и В. Т. Базылева.

Изложение материала в предлагаемом пособии основано на опыте, накопленном авторами в процессе многолетнего преподавания курса геометрии на кафедре геометрии математического факультета в Московском педагогическом государственном университете.

Учебное пособие по геометрии состоит из двух томов. В первом томе представлены материалы по аналитической геометрии.

Данное учебное пособие (том 2) представляет собой максимально полное изложение всех разделов курса геометрии, входящих во вторую часть программы педагогических вузов, что позволяет использовать его для обучения студентов разных профилей.

Так, по направлению подготовки «Математика», где количество часов, отводимых на курс геометрии, достаточно большое, многие разделы пособия могут быть использованы полностью.

При преподавании курса геометрии по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») в гл. 1 «Проективная геометрия» можно опустить материал § 1.25, гл. 2 «Методы изображений» и гл. 3 «Основания геометрии» на лекционном курсе рассмотреть в обзорном порядке, в гл. 4 «Неевклидовы геометрии» опустить материал § 4.2 и 4.4, а при изучении гл. 5 «Дифференциальная геометрия» не рассматривать вопросы, связанные с внутренней геометрией поверхности.

Следует отметить, что данный курс снабжен большим количеством решенных примеров, иллюстрирующих теоретический материал. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения, часть из которых содержит подробные решения, что позволит студентам включиться в эффективную самостоятельную работу по курсу геометрии. В конце пособия помещены ответы и указания к этим задачам.

Объем предлагаемого курса геометрии позволяет использовать отдельные разделы при изучении дисциплин по выбору, при подготовке курсовых работ и выпускных квалификационных работ студентов.

Материалы гл. 1 написала Л. А. Игнаточкина, гл.2 — О. Ю. Тесля, гл. 3 — Н. С. Денисова, гл. 4 — А. В. Никифорова, гл. 5 — Н. И. Гусева.

Глава 1

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1.1. Проективное пространство

Пусть дано $(n+1)$-мерное векторное пространство V ([11], § 6.1) и непустое множество P произвольной природы. Говорят, что множество P *наделено структурой n-мерного проективного пространства*, если задано отображение

$$\pi : V \setminus \{\vec{0}\} \to P,$$

ставящее в соответствие каждому ненулевому вектору из V элемент из множества P и удовлетворяющее двум условиям:

1) отображение π является сюръективным;

2) $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$ тогда и только тогда, когда существует ненулевое вещественное число λ, такое, что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, т.е. векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Пара (P,π) называется *проективным пространством размерности n*, *порожденным векторным пространством V*. Будем обозначать проективное пространство (P,π) через P.

Условия, которым удовлетворяет отображение π, называются *аксиомами проективного пространства*. Элементы проективного пространства P называются *точками* и обозначаются большими буквами латинского алфавита. Если для точки X, принадлежащей проективному пространству P, выполняется равенство $\pi(\vec{x}) = X$ для некоторого вектора $\vec{x}$, то говорят, что *вектор $\vec{x}$ порождает точку X*, а *точка X порождена вектором $\vec{x}$*.

Замечание 1. Пусть точка X проективного пространства P порождается вектором $\vec{x}$. Тогда согласно второй аксиоме проективного пространства любой вектор $\vec{y}$, коллинеарный вектору $\vec{x}$, порождает ту же точку X. Если вектор $\vec{y}$ не коллинеарен вектору $\vec{x}$, то согласно второй аксиоме проективного пространства $\pi(\vec{y}) \neq \pi(\vec{x})$, т.е. вектор $\vec{y}$ порождает точку, отличную от точки X. Итак, получаем, что каждая точка проективного пространства P порождается всеми ненулевыми векторами векторного пространства V, коллинеарными вектору $\vec{x}$.

Такие векторы, дополненные нуль-вектором, образуют одномерное векторное подпространство L векторного пространства V. В связи с этим будем говорить, что *точка X порождается одномерным векторным подпространством L*. Очевидно, что L является линейной оболочкой $L(\vec{x})$ ([11], § 6.3) вектора $\vec{x}$.

Пусть W — $(k+1)$-мерное векторное подпространство векторного пространства V, причем $k \geq 1$. Подмножество $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$ точек проективного пространства P называется *k-мерным проективным подпространством* проективного пространства P, или *k-мерной проективной плоскостью* (короче, *k-плоскостью*) в P. При этом будем говорить, что векторное подпространство *W порождает k-мерное проективное подпространство* $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$.

Пусть даны два векторных подпространства W и U векторного пространства V, размерности которых равны $k+1$ и $l+1$ соответственно. Допустим для определенности, что $k < l$. Будем говорить, что k-плоскость $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$ *содержится* в l-плоскости $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$, если W является подмножеством в U. Аналогичным образом будем говорить, что точка X проективного пространства *P принадлежит* k-плоскости $\pi(W \setminus \{\vec{0}\})$, если векторное подпространство L, порождающее эту точку, содержится в векторном подпространстве W.

Замечание 2. Если мы возьмем множество P, состоящее из конкретных объектов, и зададим на нем конкретное отображение, удовлетворяющее аксиомам проективного пространства, то будем говорить, что построена *модель* проективного пространства.

Пример 1.1. Пусть V — $(n+1)$-мерное векторное пространство. Рассмотрим множество P, состоящее из всевозможных одномерных векторных подпространств векторного пространства V. Зададим на этом множестве структуру проективного пространства. Пусть отображение $\pi : V \setminus \{\vec{0}\} \to P$ задается формулой

$$\pi(\vec{x}) = L(\vec{x}),$$

где $\vec{x}$ — произвольный элемент из $V \setminus \{\vec{0}\}$; $L(\vec{x})$ — линейная оболочка вектора $\vec{x}$. Как известно ([11], § 6.3), $L(\vec{x})$ является одномерным векторным подпространством в векторном пространстве V, а значит, отображение π задано корректно.

Проверим, что для отображения π выполняются обе аксиомы проективного пространства. Отображение π сюръективно, так как в любом одномерном подпространстве L существует хотя бы один ненулевой вектор $\vec{x}$. Он будет прообразом подпространства L при отображении π.

Рассмотрим два ненулевых вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ из векторного пространства V. При отображении π им соответствуют их линейные оболочки $L(\vec{x})$ и $L(\vec{y})$. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, т. е. $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ для некоторого ненулевого вещественного числа λ, то по определению линейной оболочки получим, что $L(\vec{x}) = L(\vec{y})$. Значит, $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$. Обратно, пусть $\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{y})$, т. е. $L(\vec{x}) = L(\vec{y})$. В частности, вектор $\vec{x}$ принадлежит линейной оболочке $L(\vec{y})$. Следовательно, по определению линейной оболочки ([11], § 6.3) существует вещественное число λ, такое, что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, т. е. векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны.

Итак, для введенного отображения π выполняются обе аксиомы проективного пространства, следовательно, множество одномерных подпространств $(n+1)$-мерного векторного пространства V обладает структурой n-мерного проективного пространства.

Так как множество P в данном случае состоит из конкретных объектов (одномерных подпространств), мы получили модель n-мерного проективного пространства (замечание 2). Она называется *канонической моделью проективного пространства*, или *каноническим проективным пространством*.

В дальнейшем будут рассматриваться только четырехмерное векторное пространство V и его трехмерные и двумерные векторные подпространства. Тогда соответствующее трехмерное проективное пространство P будем называть просто *проективным пространством*, а двумерные и одномерные проективные подпространства в P — *проективными плоскостями* и *проективными прямыми*. Будем обозначать проективные плоскости малыми греческими буквами, а проективные прямые — малыми латинскими буквами.

§ 1.2. Свойства проективного пространства и проективной плоскости

Проективная плоскость и проективное пространство обладают как рядом свойств, сходных со свойствами плоскости и пространства классической евклидовой геометрии, так и рядом свойств, отличных от их свойств. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Теорема 1. *Через любые две различные точки A и B проективной плоскости σ проходит единственная проективная прямая d.*

☐ Докажем сначала существование проективной прямой d. Обозначим трехмерное векторное подпространство, порождающее проективную плоскость σ, через W, а векторы, порождающие точки A и B, — через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Так как точки A и B принадлежат проективной плоскости σ, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат подпространству W. Рассмотрим линейную оболочку $U = L(\vec{a},\vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как эти векторы не коллинеарны (иначе точки A и B совпадали бы), их линейная оболочка U является двумерным векторным подпространством. Это векторное подпространство порождает проективную прямую $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$, которую обозначим d. В силу того, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежали W, их линейная оболочка $L(\vec{a},\vec{b})$ также содержится в W, следовательно, проективная прямая d содержится в проективной плоскости σ. Так как вектор $\vec{a}$ принадлежит подпространству U, точка A принадлежит проективной прямой d. Аналогично получаем, что точка B принадлежит проективной прямой d. Итак, существование проективной прямой, удовлетворяющей требованиям теоремы, доказано.

Докажем единственность проективной прямой d. Допустим, что на проективной плоскости σ существует еще одна проективная прямая c, проходящая через точки A и B. Обозначим порождающее ее двумерное векторное подпространство через $\tilde{U}$. Так как точка A принадлежит прямой c, вектор $\vec{a}$ принадлежит подпространству $\tilde{U}$. Аналогично вектор $\vec{b}$ принадлежит подпространству $\tilde{U}$. В силу того, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а векторное подпространство $\tilde{U}$ двумерно, пара $(\vec{a},\vec{b})$ является базисом $\tilde{U}$. Тогда по теореме 3 ([11], § 6.3) получим, что $\tilde{U}$ совпадает с линейной оболочкой $L(\vec{a},\vec{b})$, следовательно, совпадают проективные прямые c и d. Полученное противоречие доказывает единственность проективной прямой, проходящей через точки A и B. ■

Замечание 1. Из теоремы 1 следует корректность еще одного способа обозначения проективных прямых: если проективная прямая проходит через две различные точки A и B, то ее обозначают (AB).

Теорема 2. *Пусть даны три точки A, B, C проективного пространства P, не лежащие на одной проективной прямой. Тогда существует единственная проективная плоскость σ, проходящая через эти точки.*

□ Докажем сначала существование проективной плоскости σ, проходящей через точки A, B и C. Обозначим через V векторное пространство, порождающее проективное пространство P, а через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы, порождающие точки A, B, C соответственно.

Если предположить, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, т.е. принадлежат одному двумерному векторному подпространству U из V, то U породит проективную прямую, которой будут принадлежать точки A, B, C. Это противоречит условию предложения. Итак, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны. Тогда их линейная оболочка $W = L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ будет трехмерным векторным подпространством в V. Оно порождает проективную плоскость, которую обозначим σ. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ принадлежат линейной оболочке W, точки A, B, C принадлежат проективной плоскости σ.

Докажем единственность проективной плоскости σ. Пусть существует еще одна проективная плоскость $\tilde{\sigma}$. Обозначим порождающее ее трехмерное векторное подпространство через $\tilde{W}$. Так как точки A, B, C принадлежат проективной плоскости $\tilde{\sigma}$, некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ принадлежат трехмерному векторному подпространству $\tilde{W}$, а значит, являются его базисом. Тогда $\tilde{W}$ будет линейной оболочкой этих векторов, а значит, совпадет с векторным подпространством W. Следовательно, совпадут проективные плоскости σ и $\tilde{\sigma}$, порождаемые этими векторными подпространствами. Это противоречие доказывает единственность проективной плоскости σ. ■

Замечание 2. Из теоремы 2 следует корректность еще одного способа обозначения проективных плоскостей: если проективная плоскость проходит через три различные точки A, B, C, не лежащие на одной проективной прямой, то ее обозначают (ABC).

Следствие 1. *Пусть в проективном пространстве P даны две проективные прямые, имеющие единственную общую точку. Тогда существует единственная проективная плоскость, содержащая эти прямые.*

Доказательство этого следствия оставляем читателю.

Теорема 3. *Если две различные точки A и B проективной прямой d принадлежат проективной плоскости* σ, *то вся прямая d содержится в проективной плоскости* σ.

□ Обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторы, порождающие точки A и B, через U — двумерное векторное подпространство, порождающее проективную прямую d, через W — трехмерное векторное подпространство, порождающее проективную плоскость σ. Так как точки A и B по условию принадлежат проективной прямой d, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат векторному подпространству U. В силу того, что точки A и B различны, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а следовательно, будут образовывать базис двумерного векторного подпространства U. Следовательно, U можно рассматривать как линейную оболочку $L(\vec{a},\vec{b})$ этих векторов. Кроме того, точки A и B принадлежат проективной плоскости σ, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принадлежат трехмерному векторному подпространству W. Так как $U = L(\vec{a},\vec{b})$, то любой вектор из U будет принадлежать W по определению векторного подпространства ([11], § 6.3). Итак, получаем, что U является подмножеством в W, а значит, проективная прямая d содержится в проективной плоскости σ. ■

Теорема 4. *Любые две различные прямые* d_1 *и* d_2 *проективной плоскости* σ *пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку.*

□ Обозначим через U_1 и U_2 двумерные векторные подпространства, порождающие проективные прямые d_1 и d_2 соответственно, а через W — трехмерное векторное подпространство, порождающее плоскость σ. Векторные подпространства U_1 и U_2 различны, так как различны проективные прямые d_1 и d_2. Так как проективные прямые d_1 и d_2 содержатся в проективной плоскости σ, двумерные векторные подпространства U_1 и U_2 содержатся в трехмерном векторном подпространстве W. Два различных двумерных векторных подпространства в трехмерном векторном подпространстве всегда пересекаются по одномерному векторному подпространству. Обозначим его L. Оно порождает точку, которую обозначим A. Так как L содержится и в U_1, и в U_2, точка A принадлежит обеим проективным прямым d_1 и d_2.

Если предположить, что проективные прямые d_1 и d_2 имеют еще одну общую точку B, то в силу теоремы 1 эти прямые совпадут. Полученное противоречие с условием доказывает единственность общей точки проективных прямых d_1 и d_2. ■

§ 1.3. Модели проективной прямой

Рассмотрим плоскость α из классической евклидовой геометрии. Будем называть ее *аффинной плоскостью*. Прямую из классической евклидовой геометрии будем называть *аффинной прямой*.

Множество всех прямых аффинной плоскости α, проходящих через некоторую фиксированную точку O этой плоскости, называется ***пучком прямых с центром в точке O*** и обозначается $\mathcal{P}(O)$ (рис. 1.1). Зададим на этом множестве структуру одномерного проективного пространства, т. е. структуру проективной прямой. Обозначим через U направляющее подпространство плоскости α. Это двумерное векторное пространство. Рассмотрим отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to \mathcal{P}(O),$$

которое каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ из U ставит в соответствие прямую l из пучка $\mathcal{P}(O)$, которая параллельна этому вектору. Так как у каждой прямой пучка $\mathcal{P}(O)$ есть направляющий вектор, отображение π сюръективно, т. е. выполняется первая аксиома проективного пространства (см. § 1.1). Кроме того, две прямые пучка $\mathcal{P}(O)$ совпадают тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, т. е. выполняется и вторая аксиома проективного пространства. Таким образом, отображение π задает структуру одномерного проективного пространства в пучке прямых $\mathcal{P}(O)$, т. е. пучок $\mathcal{P}(O)$ является проективной прямой. Также говорят, что пучок прямых аффинной плоскости является моделью проективной прямой. Заметим, что точкой такой проективной прямой является прямая пучка $\mathcal{P}(O)$.

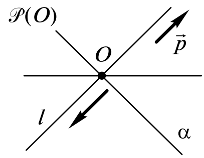

Рис. 1.1

Пучок прямых является не очень удобной для построений моделью проективной прямой. Рассмотрим более удобную модель проективной прямой.

Пусть на аффинной плоскости α даны аффинная прямая d и пучок прямых $\mathcal{P}(O)$ с центром в точке O, не лежащей на аффинной прямой d

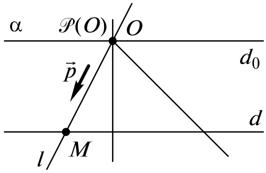

Рис. 1.2

(рис. 1.2). Попытаемся ввести структуру проективной прямой на аффинной прямой d при помощи пучка $\mathscr{P}(O)$. Зададим отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to d,$$

где U — по-прежнему направляющее подпространство плоскости α, следующим образом: каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ из U поставим в соответствие параллельную ему прямую l пучка $\mathscr{P}(O)$ и обозначим через M точку пересечения аффинных прямых l и d. Тогда положим по определению $\pi(\vec{p}) = M$. Это отображение не задает структуру проективного пространства (см. § 1.1) на аффинной прямой d, так как отображение π не может поставить в соответствие векторам, параллельным прямой d_0, ни одной точки прямой d. Возникает вопрос: сколько элементов не хватает на аффинной прямой d для того, чтобы отображение π смогло задать структуру проективной прямой? Образов нет у векторов, параллельных аффинной прямой d_0. Все они попарно коллинеарны, следовательно, по второй аксиоме проективного пространства (см. § 1.1) порождают одну и ту же точку. Значит, аффинную прямую нужно дополнить одним элементом, который будет ставиться в соответствие векторам, параллельным прямой d_0. Будем обозначать этот элемент большой буквой латинского алфавита со знаком бесконечности, например A_∞ или B^∞, и называть *несобственной* (*или бесконечно удаленной*) *точкой*. Объединение точек аффинной прямой d и несобственной точки называется *расширенной прямой* и обозначается $\bar{d}$. Точки расширенной прямой $\bar{d}$, которые принадлежат аффинной прямой d, называются *собственными точками* расширенной прямой $\bar{d}$. Тогда отображение

$$\pi : U \setminus \{\vec{0}\} \to \bar{d}$$

задает структуру проективной прямой на расширенной прямой $\bar{d}$ (обе аксиомы проективного пространства выполняются очевидным образом), т. е. расширенная прямая является еще одной моделью проективной прямой. Эта модель удобнее, так как точками в ней являются точки аффинной прямой d и добавленный элемент — несобственная точка. Подчеркнем, что с точки зрения проективной геометрии собственные и несобственная точки расширенной прямой равноправны.

§ 1.4. Модели проективной плоскости

Рассмотрим пространство из классической евклидовой геометрии. Будем называть его *аффинным пространством*.

Множество всех прямых аффинного пространства, проходящих через фиксированную точку O, называется ***связкой прямых с центром в точке O*** и обозначается $\mathscr{C}(O)$ (рис. 1.3). Зададим на этом множестве структуру двумерного проективного пространства, т. е. проективной плоскости. Обозначим через W геометрическое векторное пространство ([11], § 6.1). Оно трехмерно. Зададим отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \mathscr{C}(O),$$

которое каждому ненулевому вектору $\vec{p}$ ставит в соответствие параллельную ему аффинную прямую l связки $\mathscr{C}(O)$. Докажите самостоятельно, что такое отображение задает структуру проективной плоскости на множестве $\mathscr{C}(O)$. Таким образом, связка прямых аффинного пространства является моделью проективной плоскости. Точками в этой модели являются аффинные прямые связки $\mathscr{C}(O)$.

Выясним, как выглядят в такой модели проективные прямые. Рассмотрим двумерное векторное подпространство U в векторном пространстве W. Напомним, что проективной прямой на проективной плоскости $\mathscr{C}(O)$ будет множество аффинных прямых $\pi(U \setminus \{\vec{0}\})$. Найдем это множество. Заметим, что существует единственная аффинная плоскость α, проходящая через точку O и имеющая U своим направляющим подпространством. Пересечение плоскости α и связки $\mathscr{C}(O)$ — это пучок $\mathscr{P}(O)$ прямых с центром в точке O. По определению отображения π образом векторов из U является множество всех аффинных прямых пучка $\mathscr{P}(O)$, следовательно, проективной прямой в рассматриваемой модели будет пучок прямых с центром в той же точке O.

Так же как и в случае моделей проективной прямой, для проективной плоскости существует более удобная модель.

Пусть даны аффинная плоскость α и связка прямых $\mathscr{C}(O)$ с центром в точке O, не лежащей в плоскости α (рис. 1.4). Через W обозначим геометрическое векторное пространство. По аналогии с расширенной прямой построим модель проективной плоскости, используя аффинную плоскость α. Нам не хватит точек плоскости α для этой

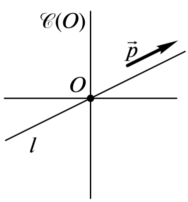

Рис. 1.3

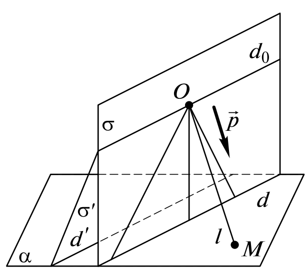

Рис. 1.4

цели и придется добавлять к плоскости α дополнительные элементы. Выясним, сколько таких элементов нам потребуется.

Рассмотрим отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \alpha,$$

которое каждому вектору $\vec{p}$ из $W \setminus \{\vec{0}\}$ ставит в соответствие точку пересечения прямой l из связки $\mathscr{C}(O)$, параллельной вектору $\vec{p}$, и аффинной плоскости α. При таком отображении π для векторов, параллельных плоскости α, нет образов, так как прямые (например, d_0), параллельные плоскости α, не имеют с ней общих точек. Это множество векторов (дополненное нуль-вектором) образует двумерное векторное подпространство U в векторном пространстве W. Дополним аффинную плоскость α элементами, которые будем обозначать большими буквами латинского алфавита со знаком бесконечности, например A^{∞} или B_{∞}. Эти элементы называются ***несобственными*** (*или бесконечно удаленными*) ***точками***. Множество, состоящее из точек аффинной плоскости α и несобственных точек, называется ***расширенной плоскостью*** и обозначается $\bar{\alpha}$. Точки расширенной плоскости $\bar{\alpha}$, принадлежащие аффинной плоскости α, называются ***собственными точками*** расширенной плоскости $\bar{\alpha}$.

Для того чтобы выполнялась вторая аксиома проективного пространства (см. § 1.1), всем векторам из U, любые два из которых коллинеарны, поставим в соответствие одну и ту же несобственную точку. Тогда отображение

$$\pi : W \setminus \{\vec{0}\} \to \bar{\alpha} \tag{1.1}$$

будет задавать структуру проективной плоскости на множестве $\bar{\alpha}$, т. е. на расширенной плоскости. Аксиомы двумерного проективного пространства выполняются очевидным образом.

Выясним, как будут выглядеть проективные прямые на расширенной плоскости. Чтобы получить проективную прямую на проективной плоскости, нужно взять образы при отображении (1.1) всевозможных двумерных подпространств векторного пространства W (см. § 1.1). Каждому ненулевому вектору этого подпространства ставится в соответствие прямая из связки $\mathscr{C}(O)$, параллельная ему. Множество всех таких прямых образует пучок $\mathscr{P}(O)$ с центром в точке O. Обозначим аффинную плоскость, в которой лежит этот пучок, через σ. Для плоскости σ возможны два случая.

Во-первых, аффинные плоскости α и σ имеют общие точки. Множество этих точек образует аффинную прямую d. Пучок прямых $\mathscr{P}(O)$ плоскости σ содержит единственную прямую, параллельную плоскости α. Обозначим ее d_0. Векторам, параллельным прямой d_0, ставится в соответствие несобственная точка. Итак, образом U (без нуль-вектора) при отображении π будет расширенная прямая $\bar{d}$. При этом сужение отображения π на подпространство U (без нуль-вектора) совпадает с отображением, которое задает структуру проективной прямой на расширенной прямой $\bar{d}$ (см. § 1.3). Отметим, что несобственная точка расширенной прямой $\bar{d}$ ставится в соответствие векторам, параллельным аффинной прямой d_0. Этим же векторам ставится в соответствие несобственная точка расширенной плоскости $\bar{\alpha}$. Таким образом, множество несобственных точек, добавленных к аффинной плоскости при построении расширенной плоскости $\bar{\alpha}$, совпадает с множеством несобственных точек расширенных прямых, принадлежащих расширенной плоскости $\bar{\alpha}$.

Во-вторых, аффинные плоскости α и σ не имеют общих точек. В этом случае образом двумерного векторного подпространства U (без нуль-вектора) будет множество всех несобственных точек. По определению это проективная прямая (см. § 1.1). Она называется *несобственной* (*или бесконечно удаленной*) *прямой* и обозначается малой буквой латинского алфавита со знаком бесконечности, например a_∞ или b^∞. Еще раз отметим, что несобственная прямая содержит все несобственные точки, добавленные к аффинной плоскости α. Проективные прямые расширенной плоскости, отличные от несобственной прямой, называются *собственными прямыми* расширенной плоскости.

Наконец, выясним, какие несобственные точки добавляются двум параллельным аффинным прямым d и d' аффинной плоскости α. Обозначим U и U' двумерные векторные подпространства в векторном пространстве W, которые порождают расширенные прямые $\bar{d}$ и $\bar{d}'$. Несобственную точку расширенной прямой $\bar{d}$ порождают ненулевые векторы, параллельные прямой d_0. Но несобственную точку расширенной прямой $\bar{d}'$ также порождают ненулевые векторы, параллельные прямой d_0. Таким образом, несобственные точки, добавленные к параллельным аффинным прямым, совпадают, т. е. это одна и та же точка.

Замечание 1. В дальнейшем, если не оговорено противное, рисунки будем выполнять на расширенной плоскости. Из проведенных выше рассуждений следуют правила построения на расширенной плоскости:

1) через две различные собственные точки расширенной плоскости прямая проводится так же, как в классической евклидовой геометрии;

2) чтобы задать несобственную точку B_∞ расширенной плоскости, нужно провести аффинную прямую b, к которой добавлена эта несобственная точка;

3) чтобы провести прямую через собственную точку A и несобственную точку B_∞, нужно через точку A провести аффинную прямую c параллельно аффинной прямой b, которая задает точку B_∞.

§ 1.5. Теорема Дезарга

Фигурой в проективном пространстве P будем называть любое множество, состоящее из точек, проективных прямых или проективных плоскостей проективного пространства.

Трехвершинником ABC в проективном пространстве P называется фигура, состоящая из трех точек A, B, C, не лежащих на одной проективной прямой и трех проективных прямых (AB), (BC), (AC), попарно соединяющих эти точки. Точки A, B, C называются *вершинами*, а проективные прямые (AB), (BC), (AC) называются *сторонами* трехвершинника ABC (рис. 1.5).

Стороны (AB), (BC), (AC) также обозначаются c, a, b соответственно.

Из теорем 2 и 3 (см. § 1.2) следует, что для любого трехвершинника существует проективная плоскость, содержащая его.

Если даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$, будем называть *соответствующими* вершины A и A', B и B', C и C'. Аналогично, будем называть *соответствующими* стороны a и a', b и b', c и c'.

Теорема (*Дезарга*). *Пусть даны два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ такие, что ни одна из вершин или сторон одного из них не совпадает с соответствующим элементом другого. Тогда три проективные прямые (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку тогда и только тогда, когда точки пересечения проективных прямых a и a'; b и b'; c и c' лежат на одной проективной прямой.*

□ Пусть три проективные прямые (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку S.

На рис. 1.6 изображен случай, когда данные трехвершинники лежат в одной проективной плоскости. При этом в качестве модели проективной плоскости использована расширенная плоскость. Отметим, что доказательство проводится в общем случае: трехвершинники расположены в проективном пространстве.

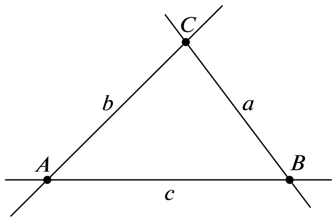

Рис. 1.5

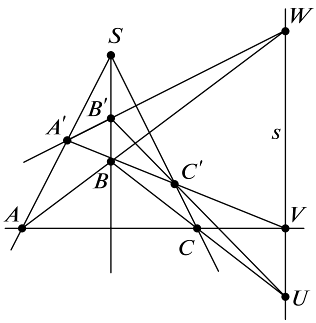

Рис. 1.6