СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

**А. А. ЭРДЕДИ, Н. А. ЭРДЕДИ**

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## УЧЕБНИК

*Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО»)
в качестве учебника для использования в учебном процессе
образовательных учреждений, реализующих программы СПО*

*Регистрационный номер рецензии 367
от 22 августа 2013 г. ФГАУ «ФИРО»*

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 531.8(075.32)
ББК 30.12я723
Э75

Рецензент —
преподаватель высшей квалификационной категории ГБОУ СПО МО «Мытищинский машиностроительный колледж»,
почетный работник СПО *В. К. Житков*

**Эрдеди А. А.**

Э75 Техническая механика : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 528 с.

ISBN 978-5-7695-9607-0

Изложены основы теоретической механики, сопротивления материалов, деталей машин и механизмов с применением элементов высшей математики. Даны примеры расчетов. Учебник создан на основе 13-го издания учебного пособия «Теоретическая механика. Сопротивление материалов» и 5-го издания учебника «Детали машин». Учебник переработан в соответствии с ФГОС и предназначен для изучения предмета «Техническая механика».

Учебник может быть использован при изучении общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика» в соответствии с ФГОС СПО для специальностей укрупненной группы 150000 «Металлургия, машиностроение и материалообработка».

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 531.8(075.32)
ББК 30.12я723



ISBN 978-5-7695-9607-0

## Уважаемый читатель!

Данный учебник является частью учебно-методического комплекта по специальностям технического профиля.

Учебник предназначен для изучения общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика».

Учебно-методические комплекты нового поколения включают в себя традиционные и инновационные учебные материалы, позволяющие обеспечить изучение общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин и профессиональных модулей. Каждый комплект содержит учебники и учебные пособия, средства обучения и контроля, необходимые для освоения общих и профессиональных компетенций, в том числе и с учетом требований работодателя.

Учебные издания дополняются электронными образовательными ресурсами. Электронные ресурсы содержат теоретические и практические модули с интерактивными упражнениями и тренажерами, мультимедийные объекты, ссылки на дополнительные материалы и ресурсы в Интернете. В них включен терминологический словарь и электронный журнал, в котором фиксируются основные параметры учебного процесса: время работы, результат выполнения контрольных и практических заданий. Электронные ресурсы легко встраиваются в учебный процесс и могут быть адаптированы к различным учебным программам.

Учебно-методический комплект разработан на основании Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования с учетом его профиля.

# Предисловие

Предлагаемый учебник включает в себя основы теоретической механики с элементами теории механизмов, сопротивления материалов; деталей и узлов машин.

Изложение ведется с применением высшей математики. Используется правая система координат и соответствующее ей правило знаков для моментов сил и пар.

Учебник соответствует действующим стандартам, в том числе Государственным стандартам на единицы физических величин, допуски и посадки, узлы и детали машин, термины, определения и обозначения, методы расчета, графические изображения, а также рекомендациям на обозначение физических величин Международной организации по стандартизации (ИСО).

Расчетные формулы построены таким образом, что в них применяются только основные и производные единицы СИ (в формулы не входят величины в кратных, дольных и внесистемных единицах), поэтому в экспликациях к формулам не указываются единицы, в которых выражены величины.

Для облегчения самостоятельной работы студентов, закрепления умений и навыков в решении задач теоретический материал сопровождается обобщениями, выводами, примерами решений и расчетов с пояснениями.

Учебник предназначен для студентов машиностроительных специальностей учреждений среднего профессионального образования.

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

# I ЧАСТЬ

Глава 1. Основные положения и аксиомы статики
Глава 2. Плоская система сходящихся сил
Глава 3. Плоская система параллельных сил и момент силы
Глава 4. Плоская система пар сил
Глава 5. Плоская система произвольно расположенных сил
Глава 6. Трение
Глава 7. Пространственная система сил
Глава 8. Центр тяжести
Глава 9. Кинематика точки
Глава 10. Простейшие движения твердого тела
Глава 11. Сложное движение точки
Глава 12. Плоскопараллельное движение твердого тела
Глава 13. Основы динамики материальной точки
Глава 14. Основы кинетостатики
Глава 15. Работа и мощность
Глава 16. Энегетические теоремы динамики материальной точки
Глава 17. Основы динамики системы материальных точек

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

# СТАТИКА

## Глава 1

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

*Статика* есть часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. *Абсолютным механическим равновесием* будем считать такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, причем все точки тела движутся одинаково.

Тело называют *абсолютно твердым* (или абсолютно жестким), если расстояние между любыми его точками не меняется при действии на него других тел. Абсолютно твердых тел в природе нет, но во многих случаях изменения формы и размеров (деформации) тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь.

В теоретической механике полагают, что тела абсолютно твердые, и их физико-механические свойства не учитывают (за исключением вопросов, связанных с трением).

*Материальной точкой* называется точка, имеющая массу. Материальной точкой мы будем считать не только тело, имеющее очень малые размеры, но и любое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Например, в астрономии звезды рассматривают как материальные точки, так как размеры звезд малы по сравнению с расстояниями между ними. Одно и то же реальное тело в зависимости от постановки задачи может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело, размеры которого необходимо учесть. Всякое тело можно считать взаимосвязанной совокупностью (системой) материальных точек. Абсолютно твердое тело представляет собой *неизменяемую систему* материальных точек.

Тело называется *свободным*, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении, в противном случае тело называется *несвободным*, или *связанным*.

Пример свободного тела — воздушный шар в полете. Большинство окружающих нас тел являются несвободными телами. Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или с окружающей средой.

Механическое взаимодействие тел, т. е. взаимодействие, влияющее на их состояние покоя или движения (механическое состояние), характеризуется силой.

*Сила* есть мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением, направлением и точкой приложения. Таким образом, сила — *величина векторная*. Числовое значение силы называется *модулем вектора силы*.

Направление силы есть направление того движения, которое получила бы покоящаяся свободная материальная точка под действием этой силы. Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется *линией действия силы*.

В соответствии с Международной системой единиц (СИ) в качестве единицы силы принят *ньютон* (Н).

***Ньютон есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с$^2$ в направлении действия силы.***

Кратные и дольные единицы силы образуются путем умножения или деления основной единицы на 10 в некоторой степени. Их названия образуются присоединением десятичных приставок:

| | | | |
|---|---|---|---|
| мега (М) | $10^6$ | деци (д) | $10^{-1}$ |
| кило (к) | $10^3$ | санти (с) | $10^{-2}$ |
| гекто (г) | $10^2$ | милли (м) | $10^{-3}$ |
| дека (да) | $10^1$ | микро (мк) | $10^{-6}$ |

Например, 1 килоньютон (кН) = $10^3$ Н, 1 меганьютон (МН) = $10^6$ Н, 1 миллиньютон (мН) = $10^{-3}$ Н.

Графически силу изображают отрезком прямой со стрелкой; длина отрезка в определенном масштабе равна модулю вектора силы (рис. 1.1). *Масштаб силы* показывает, сколько единиц модуля силы содержится в единице длины ее вектора. Единица масштаба силы, например, $[\mu_F]$ = = Н/мм или Н/см.

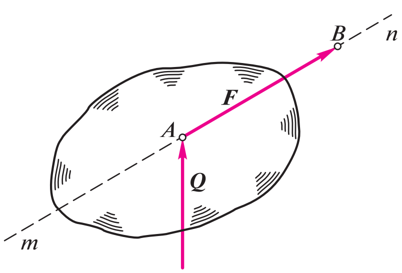



Рис. 1.1

На рис. 1.1 изображена сила, приложенная в точке $A$ и действующая по линии $mn$. Вектор силы обозначим прописной латинской жирной буквой $\boldsymbol{F}$, а модуль силы — той же буквой, но светлой $F$*. Для вектора силы $\boldsymbol{F}$ точка $A$ будет называться началом, а точка $B$ — концом вектора. Нередко удобно изображать вектор силы так, чтобы стрелка, стоящая в конце вектора, упиралась в точку приложения силы (сила $\boldsymbol{Q}$ на рис. 1.1).

Совокупность тел (в том числе материальных точек), каким-то образом связанных между собой, назовем *системой тел*. Силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему, называют *внутренними*, а силы, с которыми действуют на данную систему другие тела, — *внешними*. Если данную систему рассечь на части и рассматривать равновесие каждой части в отдельности, то внутренние для всей системы силы, действующие в сечениях, станут внешними силами для соответствующих частей системы. Такой метод позволяет определить внутренние силы, действующие в сечениях, и называется методом сечений. В теоретической механике он применяется весьма широко. Следует заметить, что деление сил на внешние и внутренние условно и зависит от постановки задачи и даже метода ее решения.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ СТАТИКИ

Условия, при которых тело может находиться в равновесии, выводятся из нескольких основных положений, принимаемых без доказательств, но подтвержденных опытом и называемых *аксиомами статики*. Основные аксиомы статики сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1642 — 1727) и поэтому названы его именем.

**Аксиома I** (аксиома инерции, или первый закон Ньютона).

Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.

Способность материального тела сохранять движение при отсутствии действующих сил или постепенно изменять это движение, когда на тело начинают действовать силы, называется *инерцией*, или *инертностью*. Инертность есть одно из основных свойств материи.

* В некоторых книгах векторы обозначают светлыми латинскими буквами со стрелочкой (или черточкой) над ними, а модули — той же буквой без стрелочки. Этот способ удобно применять при написании векторных равенств на доске или в тетради.

На основании этой аксиомы *состоянием равновесия* считаем такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т. е. по инерции.

**Аксиома II** (аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона).

Силы взаимодействия между собой двух тел всегда равны по модулю и направлены по соединяющей их прямой в противоположные стороны.

Из третьего закона Ньютона вытекает, что одностороннего механического действия одного тела на другое не существует, т. е. все силы природы — силы парные.

Совокупность сил, приложенных к данному телу (или системе тел), называется *системой сил*. Сила действия какого-либо тела на данное и сила противодействия не представляют собой систему сил, так как они приложены к различным телам.

Если какая-нибудь система сил обладает таким свойством, что после приложения к свободному телу она не изменяет его механическое состояние, то такая система сил называется *уравновешенной*.

**Аксиома III** (условие равновесия двух сил).

Для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *необходимым* для равновесия двух сил. Это значит, что если система двух сил находится в равновесии, то эти силы должны быть равны по модулю и действовать по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *достаточным* для равновесия двух сил. Это значит, что справедлива обратная формулировка аксиомы, а именно: если две силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, то такая система сил обязательно находится в равновесии.

В дальнейшем мы познакомимся с условием равновесия, которое будет необходимо, но не достаточно для равновесия.

**Аксиома IV.**

Равновесие (как и любое другое механическое состояние) твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить систему уравновешенных сил.

Следствие из аксиом III и IV.

*Механическое состояние твердого тела не нарушится от перенесения силы вдоль линии ее действия.*

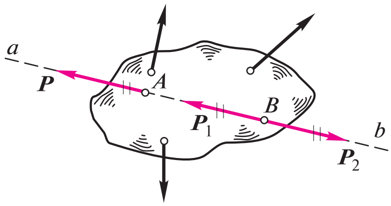



Рис. 1.2

Докажем это следствие. Пусть на твердое тело действует в числе других сила $\boldsymbol{P}$, приложенная в точке $A$ на линии действия $ab$ (рис. 1.2). В произвольно взятой на линии $ab$ точке $B$ приложим две равные по модулю и противоположно направленные силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, действующие по линии $ab$. Согласно аксиоме III, силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ взаимно уравновешены, а на основании аксиомы IV их можно приложить к телу, не нарушая механического состояния. Возьмем силы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ такими, чтобы они по модулю были равны силе $\boldsymbol{P}$:

$$P_1 = P_2 = P.$$

На основании аксиомы IV отбросим силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}_2$ как взаимно уравновешенные. Тогда оставшуюся силу $\boldsymbol{P}_1$ можно рассматривать как силу $\boldsymbol{P}$, перенесенную из точки $A$ в точку $B$ по линии действия, причем механическое состояние не нарушается. Следствие доказано.

Подчеркнем, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если рассматриваемое тело абсолютно твердое.

Две различные системы сил принято считать *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Следует заметить, что эквивалентные системы сил могут вызывать различные деформации нетвердого тела.

На рис. 1.3 изображены две системы сил, порознь действующие на один и тот же стержень $AB$, причем $P_1 = P_2$, а $Q_1 = Q_2$. На основании аксиомы III ясно, что каждая из этих систем не выводит стержень из равновесия, т.е. они эквивалентны. Но система сил $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$ стремится укоротить стержень, а система сил $(\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2)$ — удлинить его. Эквивалентность систем сил условимся записывать так:

$$(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2) \equiv (\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2).$$

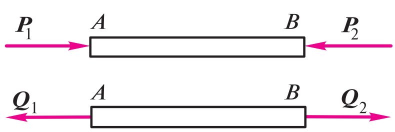



Рис. 1.3

На основании следствия из аксиом III и IV можно сказать, что *две силы эквивалентны*, если они равны по модулю и действуют по одной прямой в одну сторону. Два вектора силы (как и два любых однородных по размерности вектора) равны, если они параллельны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*, а силы, входящие в систему сил — *составляющими* этой системы.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется *уравновешивающей* этой системы.

Равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря, *уравновешенная система сил эквивалентна нулю*.

**Аксиома V** (аксиома параллелограмма).

Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

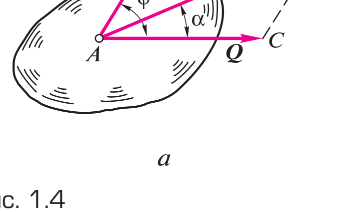
Построение диагонали параллелограмма (рис. 1.4, *а*), сторонами которого являются заданные векторы, называется *векторным* или *геометрическим* сложением. Таким образом, можно сказать, что *равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме*:

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$$

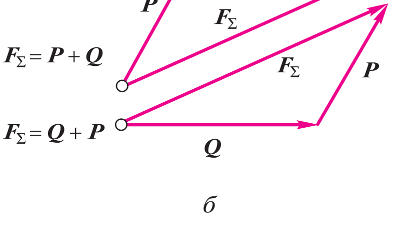
*и приложена в той же точке*.

Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил *треугольник сил* (рис. 1.4, *б*). Из рис. 1.4, *б* видно, что порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет, т. е.

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}.$$




*а*




*б*

Рис. 1.4

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить *аналитически*, для чего рассмотрим треугольник $ABC$ (см. рис. 1.4, *а*).

По теореме косинусов

$$F_\Sigma^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(\pi - \varphi) = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi,$$

откуда модуль равнодействующей

$$F_\Sigma = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\varphi}.$$

По теореме синусов

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{F_\Sigma}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_\Sigma}{\sin\varphi},$$

откуда найдем направление равнодействующей:

$$\sin\alpha = \frac{P\sin\varphi}{F_\Sigma}.$$

Рассмотрим частные случаи сложения двух сил:

1) $\varphi = 0$, тогда $F_\Sigma = P + Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в одну сторону, равна их сумме и направлена по той же прямой в ту же сторону;

2) $\varphi = 180°$, тогда $F_\Sigma = P - Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в разные стороны, равна разности этих сил и направлена по той же прямой в сторону большей силы;

3) $\varphi = 90°$, тогда $F_\Sigma = \sqrt{P^2 + Q^2}$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих под прямым углом, равна по величине диагонали прямоугольника, построенного на данных силах.

## 1.3. ТЕОРЕМА О РАВНОВЕСИИ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

**Теорема.** Для равновесия плоской системы трех непараллельных сил необходимо, но недостаточно, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Пусть даны силы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{F}$, причем линии действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ пересекаются в точке $A$ (рис. 1.5). На основании следствия из аксиом III и IV перенесем силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ вдоль линий их действия в точку $A$ и на основании аксиомы параллелограмма найдем равнодействующую $\boldsymbol{F}_\Sigma$ этих сил.

В результате получим систему двух сил ($\boldsymbol{F}_{\Sigma}$, $\boldsymbol{F}$), эквивалентную данным трем силам:

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{F}) \equiv (\boldsymbol{F}_{\Sigma}, \boldsymbol{F}).$$

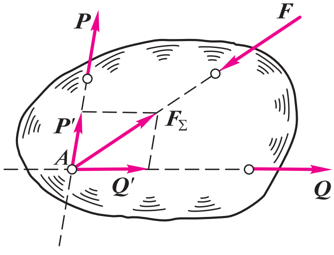


Рис. 1.5

Но, согласно аксиоме III, равновесие возможно, если силы $\boldsymbol{F}_{\Sigma}$ и $\boldsymbol{F}$ лежат на одной прямой, следовательно, линия действия силы $\boldsymbol{F}$ также пройдет через точку $A$.

Данная теорема дает лишь необходимое условие равновесия, но недостаточное, так как три силы могут сходиться в одной точке, но не быть в равновесии.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называют *сходящимися*.

## 1.4. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ. ПРИНЦИП ОСВОБОЖДАЕМОСТИ

*Связями* называют ограничения, налагаемые на положения и скорости точек тела в пространстве. Сила, с которой тело действует на связь, называется *силой давления*; ответная сила называется *силой реакции* или просто *реакцией*.

Согласно аксиоме взаимодействия, эти силы по модулю равны и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Силы реакций и давлений приложены к различным телам и поэтому не представляют собой систему сил.

Силы, действующие на тело, делятся на *активные* и *реактивные*. Активные силы стремятся перемещать тело, к которому они приложены, а реактивные препятствуют этому перемещению. Принципиальное отличие активных сил от реактивных заключается в том, что значение реактивных сил, вообще говоря, зависит от значения активных сил, но не наоборот. Активные силы часто называют *нагрузками*.

При решении большинства задач статики несвободное тело условно изображают как свободное с помощью так называемого *принципа освобождаемости*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их реакциями.

В результате применения этого принципа получаем тело, свободное от связей и находящееся под действием некоторой системы активных и реактивных сил.

Направление реакций определяется тем, в каком направлении данная связь препятствует перемещению тела. Правило для определения направления реакций можно сформулировать так: *направление реакции связи противоположно направлению перемещения, не допускаемого данной связью*.

Если связи считать идеально гладкими, то во многих случаях можно сразу указать направление их реакций. Рассмотрим направление реакций основных видов связей, встречающихся в различных конструкциях.

1. Идеально гладкая плоскость (рис. 1.6). В этом случае реакция $\boldsymbol{R}$ направлена *перпендикулярно опорной плоскости в сторону тела*, так как такая связь не дает телу перемещаться только в сторону опорной плоскости, т. е. перпендикулярно ей.

Если тело находится на наклонной плоскости, то, разложив силу тяжести $\boldsymbol{G}$ на две составляющие $\boldsymbol{G}_1$ и $\boldsymbol{G}_2$, параллельную и перпендикулярную опорной плоскости, можно видеть, что составляющая $\boldsymbol{G}_1$ будет перемещать тело вдоль плоскости, а составляющая $\boldsymbol{G}_2$ будет прижимать тело к плоскости и уравновешиваться реакцией $\boldsymbol{R}$.

2. Идеально гладкая поверхность (рис. 1.7). В этом случае реакция $\boldsymbol{R}$ направлена перпендикулярно касательной плоскости $t—t$, т. е. *по нормали к опорной поверхности в сторону тела*, так как нормаль есть единственное направление перемещения тела, которое не допускает данная связь.

3. Закрепленная точка или ребро угла (рис. 1.8, ребро $B$). В этом случае реакция $\boldsymbol{R}_B$ направлена *по нормали к поверхности идеально гладкого тела в сторону тела*, так как нормаль к поверхности тела есть единственное направление перемещения, которое не допускают эти связи.

4. Гибкая связь (см. рис. 1.8). Реакция $\boldsymbol{R}$ гибкой связи не дает телу лишь удаляться от точки подвеса и поэтому направлена *вдоль связи от тела к точке подвеса*. Из рис. 1.8 видно, что гибкая связь, перекинутая через блок, изменяет направление передаваемого усилия (натяжения нити).

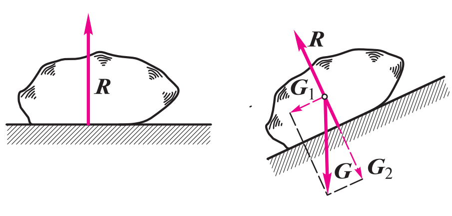



Рис. 1.6

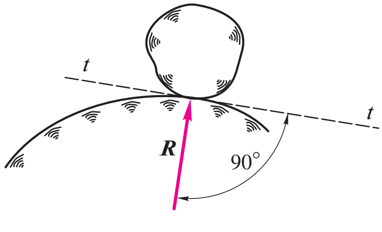



Рис. 1.7

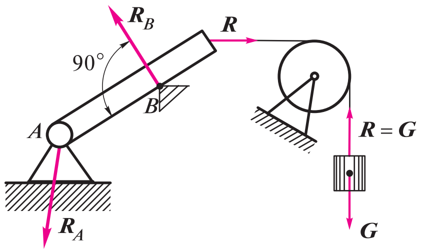



Рис. 1.8

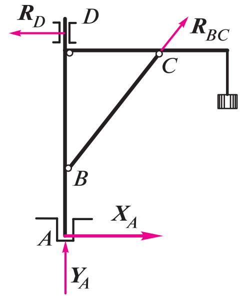



Рис. 1.9

В конструкциях широкое распространение имеют связи, которые называют шарнирами. *Шарнир* представляет собой подвижное соединение двух тел, допускающее только вращение вокруг общей оси (цилиндрический шарнир) или общей точки (шаровой шарнир).

5. Идеально гладкий цилиндрический шарнир (см. рис. 1.8, шарнир $A$; рис. 1.9, подшипник $D$). В этом случае заранее известно только, что реакция $\boldsymbol{R}_A$ *проходит через ось шарнира и перпендикулярна этой оси*, так как шарнирное соединение допускает вращение вокруг оси, но не допускает никаких перемещений тела, перпендикулярных этой оси.

6. Идеально гладкий шаровой шарнир. В этом случае заранее известно только, что *реакция проходит через центр шарнира*, так как тело, закрепленное в шаровом шарнире, может поворачиваться в любом направлении, но не может совершать никаких линейных перемещений в пространстве.

7. Идеально гладкий подпятник (рис. 1.9, подпятник $A$). Подпятник можно рассматривать как сочетание цилиндрического шарнира и опорной плоскости, поэтому будем считать реакцию подпятника состоящей из двух составляющих: $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$. Полная реакция $\boldsymbol{R}_A$ подпятника равна векторной сумме этих составляющих:

$$\boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{X}_A + \boldsymbol{Y}_A.$$

8. Стержень, закрепленный двумя концами в идеально гладких шарнирах и нагруженный только по концам (рис. 1.9, стержень $BC$). В этом случае реакция стержня, согласно аксиоме III, может быть направлена только по линии $BC$, т.е. *по прямой, соединяющей оси шарниров*.

В дальнейшем мы нередко будем встречаться с элементами различных конструкций, называемыми брусьями. *Брусом* принято считать твердое тело, у которого длина значительно больше поперечных размеров; множество (геометрическое место) центров тяжести всех поперечных сечений называется *осью бруса*. Брус с прямолинейной осью, положенный на опоры и изгибаемый приложенными к нему нагрузками, называют *балкой*.

## 1.5. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы имели дело с силами, которые условно считали приложенными в точке (в действительности они приложены к площадке, размерами которой пренебрегают); такие силы называют *сосредоточенными*. В практике часто встречаются силы, приложенные по объему или поверхности тела, например сила тяжести, давление ветра или воды и т. п. Такие силы называют *распределенными*.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, обычно обозначаемой $q$. *Интенсивность* есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка. Интенсивность в СИ выражается в ньютонах на метр (Н/м).

Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность, называется *равномерно распределенной* (рис. 1.10).

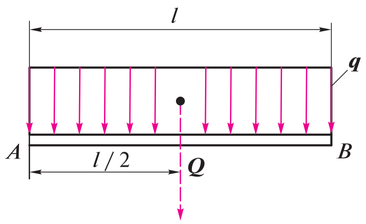



Рис. 1.10

При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен

$$Q = ql.$$

Равнодействующая $\boldsymbol{Q}$ прикладывается в середине отрезка $AB$.

Распределенная нагрузка, имеющая переменную интенсивность, называется *неравномерно распределенной*. Примером такой нагрузки может служить меняющееся по высоте давление воды на плотину.

Нагрузки, распределенные по поверхности, характеризуются *давлением*, т.е. силой, приходящейся на единицу площади. В СИ давление выражается в паскалях (Па) или ньютонах на квадратный метр (Н/м$^2$).

## 1.6. ПРИНЦИП ОТВЕРДЕВАНИЯ

Принцип отвердевания формулируется так: *механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым*.

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в равновесии, то оно не нарушится от того, что жидкость замерзнет. Если гибкая нить находится в равновесии под действием двух растягивающих сил, то равновесие не нарушится, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа в общем случае несправедлива. Если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может и не быть в равновесии. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тел. Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию (дополнительное условие равновесия гибкой нити).

Во второй части учебника — «Сопротивление материалов» — мы будем рассматривать равновесие нетвердых, но уже деформированных тел. На основании принципа отвердевания будем принимать эти тела за абсолютно твердые и применять к ним любые законы статики твердого тела.

## Глава 2

# ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

## 2.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

**Теорема.** Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.

Пусть дана плоская система трех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$, линии действия которых сходятся в точке $A$. На основании следствия из аксиом III и IV перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку $A$. Сложив первые две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую $R$ (рис. 2.1, *а*):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

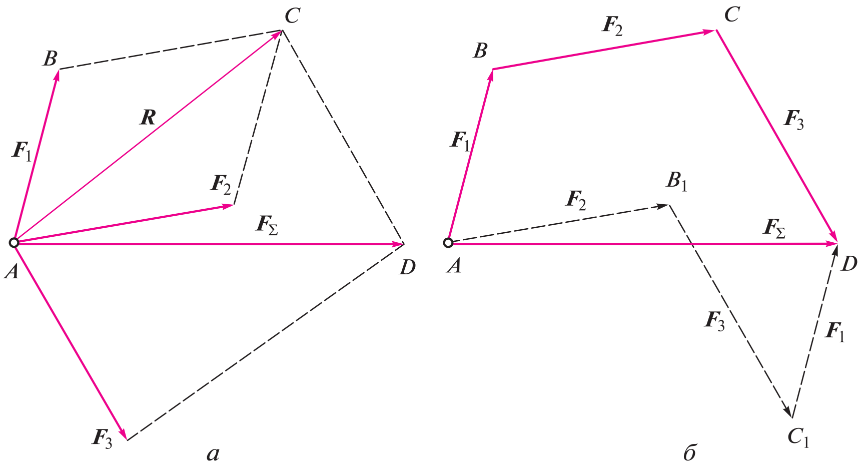



Рис. 2.1

Пользуясь той же аксиомой параллелограмма, сложим равнодействующую $\boldsymbol{R}$ с силой $\boldsymbol{F}_3$:

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3,$$

где $\boldsymbol{F}_\Sigma$ — равнодействующая данной системы трех сил.

Аналогичные действия можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n.$$

Сокращенно это равенство запишем так:

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \sum \boldsymbol{F}_i,$$

где $i$ — все целые числа от 1 до $n$.

Очевидно, что построение, выполненное на рис. 2.1, *а*, можно заменить более простым (рис. 2.1, *б*). Многоугольник $ABCD$ называется *силовым многоугольником*. Сторона $AD$, соединяющая начало первого с концом последнего вектора, называется *замыкающей стороной*.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода (см. рис. 2.1, *б*).

Если определить равнодействующую из силового многоугольника с помощью геометрии и тригонометрии, то такой способ будет называться *геометрическим*. Если сделать чертеж силового многоугольника в определенном масштабе, то равнодействующая определится простым измерением замыкающей стороны с последующим умножением на масштаб. Такой способ нахождения равнодействующей называется *графическим*.

Порядок сложения векторов при построении силового многоугольника на величину равнодействующей не влияет, так как векторная сумма от перемены мест слагаемых не меняется (см. рис. 2.1, *б*, многоугольник $AB_1C_1D$).

При построении силового многоугольника возможен случай, когда конец последнего вектора совпадает с началом первого. В этом случае замыкающей стороны не будет, и такой силовой многоугольник называется *замкнутым*.

Очевидно, что равнодействующая $\boldsymbol{F}_\Sigma$ системы сходящихся сил, дающих замкнутый силовой многоугольник, равна нулю, и, следовательно, эта система эквивалентна нулю, т. е. *находится в равновесии*. Отсюда вытекает условие, при котором плоская система сходящихся сил будет находиться в равновесии. Это условие выражается равенством

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum \boldsymbol{F}_i = 0$$

и формулируется так: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут.*

Условия равновесия, записанные в виде равенств, содержащих неизвестные величины, называются *уравнениями равновесия*.

Применяя геометрическое условие равновесия, удобно решать задачи, в которых на тело действуют три силы, так как в этом случае замкнутый силовой многоугольник представляет собой треугольник.

Решение большинства задач статики проводят в три этапа:

1) выбирают тело, равновесие которого будет рассматриваться;

2) отбрасывают связи, заменяя их реакциями, и устанавливают, какая система сил действует на тело;

3) пользуясь условиями равновесия, находят неизвестные величины.

При решении задач технической механики необходимо строго соблюдать правило: *размерности и единицы величин всех слагаемых и обеих частей равенства должны быть одинаковыми.*

В сомнительных случаях целесообразно использовать это правило для проверки правильности хода решения задач, для чего следует подставить в слагаемые проверяемого равенства единицы всех входящих в них величин и, произведя возможные сокращения, сравнить полученные единицы правой и левой частей.

Проверим таким способом приведенную в подразд. 1.5 формулу $Q = ql$:

$$[Q] = [q][l], \text{ Н} = (\text{Н/м})\cdot\text{м} = \text{Н}.$$

Единицы правой и левой частей равенства одинаковы, следовательно, формула по размерности верна.

Следует заметить, что такая проверка ничего не говорит о правильности нередко входящих в формулы числовых коэффициентов.

**Пример 2.1.** К вертикальной гладкой стене на веревке, составляющей со стеной угол $\alpha$, подвешен однородный шар (рис. 2.2). Определить натяжение веревки $\boldsymbol{F}$ и силу давления шара $\boldsymbol{P}$ на стену, если сила тяжести шара $\boldsymbol{G}$.

Решение. Рассмотрим равновесие шара. Применив принцип освобождаемости, отбросим связи и заменим их реакциями. Реакция $\boldsymbol{N}$ гладкой стены перпендикулярна стене и проходит через центр шара. Так как шар однородный, то сила тяжести $\boldsymbol{G}$ приложена в его геометрическом центре. Реакция $\boldsymbol{R}$ направлена вдоль веревки и согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил ее линия действия также должна проходить через центр шара.

К системе трех сходящихся сил, приложенных к шару, применим геометрическое условие равновесия:

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0; \quad \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{R} = 0.$$

Строим замкнутый силовой многоугольник, начиная с изображения в принятом масштабе вектора известной силы $\boldsymbol{G}$.

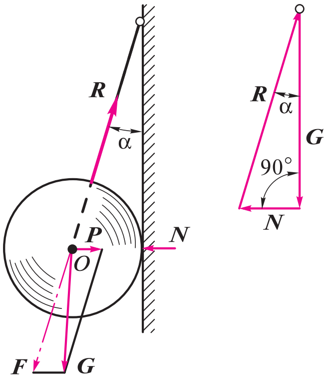


Рис. 2.2

Направление обхода треугольника (т. е. направление стрелок) определяется этой силой. Из треугольника получим соотношения:

$$N = G\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Искомая сила давления $\boldsymbol{P}$ шара на стену, согласно аксиоме взаимодействия, по модулю равна реакции $\boldsymbol{N}$ стены, но направлена в противоположную сторону:

$$P = N = G\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Натяжение $\boldsymbol{F}$ веревки по модулю равно ее реакции $\boldsymbol{R}$:

$$F = R = \frac{G}{\cos\alpha}.$$

Эту же задачу можно решить, разложив силу тяжести $\boldsymbol{G}$ по реальным направлениям (направлениям реакций) на составляющие $\boldsymbol{P}$ (сила давления шара на стену) и $\boldsymbol{F}$ (натяжение веревки), причем согласно аксиоме взаимодействия $F = R$, $P = N$.

Из построенного параллелограмма (см. рис. 2.2) легко определяем искомые величины. Такой метод решения задачи называют *методом разложения*.

## 2.2. ПРОЕКЦИИ СИЛЫ НА ОСИ КООРДИНАТ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

В тех случаях, когда на тело действует более трех сил, а также когда неизвестны направления некоторых сил, удобнее при решении задач пользоваться не геометрическим, а *аналитическим* условием равновесия, которое основано на *методе проекций*.

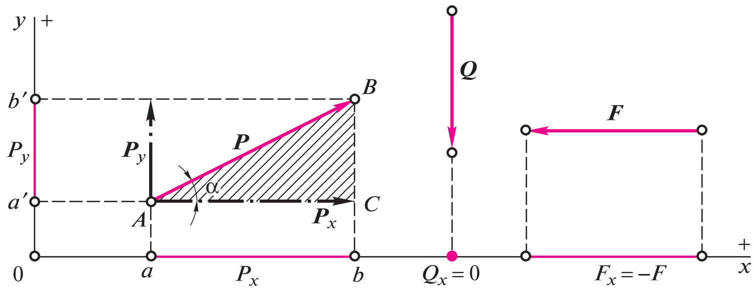


Рис. 2.3

*Проекцией силы на ось* называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.

Пусть даны координатные оси $x$, $y$, сила $\boldsymbol{P}$, приложенная в точке $A$ и расположенная в плоскости координатных осей (рис. 2.3).

Проекциями силы $\boldsymbol{P}$ на оси будут отрезки $ab$ и $a'b'$. Обозначим эти проекции соответственно $P_x$ и $P_y$. Тогда

$$P_x = P\cos\alpha; \quad P_y = P\sin\alpha.$$

Проекция силы на ось есть величина алгебраическая, которая может быть положительной или отрицательной, что устанавливается по направлению проекции. За *направление проекции* примем направление от проекции начала к проекции конца вектора силы.

Установим следующее правило знаков:

*если направление проекции силы на ось совпадает с положительным направлением оси, то эта проекция считается положительной, и наоборот.*

Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину (см. рис. 2.3, сила $\boldsymbol{F}$).

Если вектор силы перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю (см. рис. 2.3, сила $\boldsymbol{Q}$).

Зная две проекции $P_x$ и $P_y$, из треугольника $ABC$ определяем модуль и направление вектора силы $\boldsymbol{P}$ по следующим формулам:

модуль силы

$$\boldsymbol{P} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором силы $\boldsymbol{P}$ и осью $x$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_y}{P_x}.$$

Силу $\boldsymbol{P}$ можно представить как равнодействующую двух составляющих сил $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$, параллельных осям координат (см. рис. 2.3). Составляющие $\boldsymbol{P}_x$ и $\boldsymbol{P}_y$ и проекции $P_x$ и $P_y$ принципиально отличны друг от друга, так как составляющая есть величина векторная, а проекция — величина алгебраическая; но проекции силы на две взаимно-перпендикулярные оси $x$ и $y$ и модули составляющих той же силы соответственно численно равны, когда сила раскладывается по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, параллельным осям $x$ и $y$. Пусть дана плоская система $n$ сходящихся сил

$$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n.$$

Равнодействующая этой системы

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \sum \boldsymbol{F}_i.$$

В плоскости действия данной системы выберем ось координат и спроецируем данные силы и их равнодействующую на эту ось.

Проекция равнодействующей на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось, т. е.

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}.$$

Правую часть этого равенства записываем упрощенно:

$$F_{\Sigma x} = \sum X.$$

Для того чтобы определить равнодействующую любой плоской системы сходящихся сил, спроецируем их на оси координат $x$ и $y$, алгебраически сложим проекции всех сил и найдем таким образом проекции равнодействующей:

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y.$$

Зная проекции, определим модуль и направление равнодействующей:

модуль равнодействующей

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = \sqrt{\boldsymbol{F}_{\Sigma x}^2 + \boldsymbol{F}_{\Sigma y}^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором $\boldsymbol{F}_\Sigma$ и осью $x$

$$\mathrm{tg}(\boldsymbol{F}_\Sigma, x) = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma x}}.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит, и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю:

$$\boldsymbol{F}_{\Sigma} = 0; \quad F_{\Sigma x} = 0; \quad F_{\Sigma y} = 0.$$

Учитывая, что

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y,$$

получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Формулируются эти условия следующим образом: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.

С помощью уравнений равновесия можно определить *два неизвестных* элемента данной системы сил, например модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны, и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы *для любых осей координат*, но для упрощения решения задач рекомендуется оси координат по возможности выбирать *перпендикулярными неизвестным силам*, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по направлениям координатных осей; по найденным двум взаимно-перпендикулярным составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получится отрицательной, то это значит, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому на рисунке.

**Пример 2.2.** Однородная прямоугольная пластинка силой тяжести $G = 5$ Н подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом $\alpha = 18°$ к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую $\boldsymbol{P}$ давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости (рис. 2.4, *а*).

Решение. Рассмотрим равновесие пластинки. Отбросим шарнир $O$. Так как пластинка однородная и прямоугольной формы, то равнодействующая $\boldsymbol{P}$ давлений ветра и сила тяжести $\boldsymbol{G}$ пересекаются в геометрическом центре $C$ пластинки; линия действия реакции $\boldsymbol{R}_0$ шарнира на основании теоремы о равновесии трех непараллельных сил также пройдет через точку $C$.

Для системы трех сходящихся сил, действующих на пластинку, применим аналитическое условие равновесия $\sum Y = 0$, направив ось $y$ перпендикулярно пластинке (чтобы реакция $\boldsymbol{R}_0$, которую не требуется определять, не вошла в уравнение равновесия). Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = 0; \quad P - G\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$P = G\sin\alpha = 5\sin 18° = 5 \cdot 0{,}309 \approx 1{,}55 \text{ Н}.$$

Проведем проверку решения задачи с помощью геометрического условия равновесия:

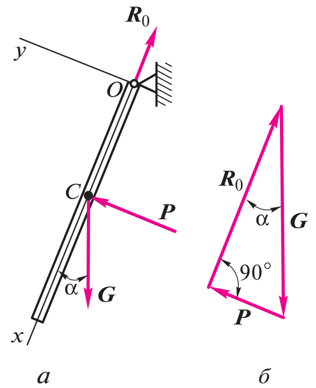


Рис. 2.4

$$\sum \boldsymbol{F}_i = 0; \quad \boldsymbol{G} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} = 0.$$

Построим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.4, *б*). Решая его, получаем

$$P = G\sin\alpha = 5\sin 18° \approx 1{,}55 \text{ Н}.$$